FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

Diplomová práca

2003

JÁN ŠPAKULA

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
KATEDRA ALGEBRY A TEÓRIE ČÍSEL

Aplikácie neštandardnej analýzy

(Diplomová práca)

Bratislava	Autor:	JÁN ŠPAKULA
2003	Vedúci diplomovej práce:	Doc. RNDr. PAVOL ZLATOŠ, PhD.

Čestne prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovanej literatúry.

Rád by som poďakoval vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr. Pavlovi Zlatošovi, PhD. za jeho podporu a spoluprácu pri vypracovávaní tejto diplomovej práce.

Obsah

Úvod

Jednu z revolúcií v matematike zapríčinili I. Newton a W. Leibniz svojimi prácami v sedemnástom storočí. Objavili niečo, čo dnes nazývame diferenciálnym a integrálnym počtom. Použili však niečo, čo vtedy nemalo žiaden matematický základ — nekonečne malé veličiny. Idey síce boli intuitívne správne, ale ich „nesprávne" použitie viedlo k nepravdivým výsledkom. Preto sa matematická obec postupom času snažila postaviť ich výsledky na rigorózny základ, čo sa však nedarilo; viedlo to k nahradeniu Newtonovho a Leibnizovho počtu Cauchyho tzv. „epsilon–delta" analýzou. Niekoľko storočí neskôr, prostriedkami matematickej logiky, práve neštandardná analýza (NSA) rehabilitovala pôvodné idey nekonečne malých (v určitom zmysle „ideálnych") veličín.

NSA vznikla v prácach Abrahama Robinsona [19] a [20], v ktorých zaviedol infinitezimálne reálne čísla a ukázal ich základné vlastnosti. Odvtedy bola NSA — teória aj používané techniky — značne rozvinutá a úspešne použitá v mnohých oblastiach matematiky. Jeden z prínosov NSA pre matematiku je, jednoducho povedané, sprecíznenie a sformalizovanie mnohých neformálnych ideí. Napríklad, reálna os môže byť považovaná zároveň za spojité kontinuum a zároveň za diskrétnu množinu bodov. Podobne sa dajú prepojiť pojmy konečna a nekonečna, spojitosti a nespojitosti. NSA preto umožnila nielen podať názorné a intuícii blízke dôkazy už známych výsledkov, ale aj viedla k novým poznatkom.

Jedným zo stavebných kameňov matematiky je dnes teória množín a logika. Matematika je vnímaná ako veda, v ktorej sa z niekoľkých základných axióm dajú vyvodiť ostatné tvrdenia. Práve na výbere týchto základných axióm sa pred storočím matematická obec nezhodla. Kameňom úrazu bola tzv. axióma výberu (AC), táto totiž ako jediná z axióm teórie množín (na ktorej stojí celá matematika) nie je konštruktívna — teda plynie z nej púha existencia niektorých matematických objektov, ktoré ale nevieme inak „zostrojiť". Pomocou AC boli dokázané niektoré dôležité vety, ale aj niekoľko tvrdení, ktoré boli proti intuícii (napríklad Banach–Tarského paradox alebo existencia Lebesguovsky nemerateľných množín). Preto sa začal skúmať súvis AC s inými tvrdeniami. Ukázalo sa, že niekoľko dôležitých tvrdení je s ňou ekvivalentných, ale niektoré sú založené na slabších množinovo–teoretických predpokladoch. Vyvstala otázka, či nemožno nahradiť vo výstavbe matematiky axiómu výberu nejakých „slabším" tvrdením, z ktorého by plynuli iba „vhodné" tvrdenia, ale nepríjemné dôsledky nie. Jedným z takýchto kandidátov je veta o ultrafiltroch.

Ako súvisia AC a NSA? Predovšetkým, NSA nám dáva aparát, s pomocou ktorého je možné dokázať niektoré tvrdenia, v predošlom odstavci označené ako „vhodné" (napríklad Hahnova–Banachova veta). Pri budovaní NSA (konštrukcia bežná v literatúre) sa ale AC používa. S pomocou aparátu matematickej logiky sa však dá NSA vybudovať aj na základe slabších predpokladov, konkrétne pomocou vety o ultrafiltroch, preto vlastne dôkazy pomocou NSA majú množinovo–teoretický význam.

Prvá kapitola tejto práce sa venuje práve výstavbe NSA a neskôr budovaniu aparátu

NSA — použitiu neštandardných modelov na reformulácie základných pojmov používaných v rôznych oblastiach matematiky. Výnimku tvorí iba odsek o Hahnovej–Banachovej vete. Druhá kapitola prezentuje názorné dôkazy niekoľkých známych viet pomocou aparátu z prvej kapitoly. Z tohto rámca sa vymyká posledný odsek, ktorý obsahuje nové výsledky. Presnejšie, budeme sa venovať otázke, za akých predpokladov je zobrazenie medzi grupami, ktoré je ϵ-homomorfizmom (t.j. vzdialenosť $f(ab)$ od $f(a)f(b)$ je menšia než ϵ pre každé a, b) skutočne blízko nejakému homomorfizmu. Ukážeme, že za predpokladov kompaktnosti zúčastnených grúp a určitej spojitosti zobrazenie je to skutočne tak; ďalej ukážeme, že predpoklad spojitosti nemožno poľaviť.

Kapitola 1

Zhrnutie poznatkov o NSA

1.1 Jazyk, formuly, modely

V tomto odseku formalizujeme „spôsob vyjadrovanie“ v matematike, teda to, ako zapisujeme tvrdenia o svete, v ktorom bádame. Zhrnieme potrebné pojmy z logiky.

Najprv rozoberieme *jazyk*, teda aké znaky pri písaní tvrdení vlastne môžeme používať. Znaky (symboly) môžu byť dvoch druhov — logické (tie sú prítomné vždy) a mimologické (špecifické, tie sa líšia podľa toho, o ktorej časti matematiky vlastne hovoríme).

Logické symboly sú:

- znak rovnosti $=$,
- premenné, označujú objekty, zväčša písmenká: $x, y, z, u, v, x_0, x', \dots,$
- logické spojky $\wedge, \vee, \implies, \iff, \neg$,
- kvantifikátory $\forall, \exists$,
- pomocné symboly – zátvorky (,).

Špecifické symboly sú znaky operácií a relácií:

- znaky relácií zhrnuté do množiny R
- znaky operácií (funkcionálne symboly) zhrnuté do množiny F.

Predpokladá sa, že $F \cap R = \emptyset$ a že tieto dve množiny neobsahujú žiaden z predtým spomenutých symbolov. Do hry ešte vstupuje „typová funkcia“ $\tau : F \cup R \to \mathbb{N}$ taká, že $\tau(r) > 0$ pre všetky relačné symboly $r \in R$. Táto funkcia určuje „árnosť“ funkcionálnych a relačných symbolov. Presnejšie ak $\tau(s) = n$ hovoríme, že s je n-árny (resp. n-miestny) symbol. Ak pre $f \in F$ platí $\tau(f) = 0$, tak f je konštantný symbol (konštanta).

Označíme ešte $F_n = \{f \in F, \tau(f) = n\}$ a $R_n = \{r \in R, \tau(r) = n\}$ pre prípustné n. (Teda platí $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ a $R = \bigcup_{0\neq n\in\mathbb{N}} R_n$.)

Takže *jazyk* je jednoznačne zadaný F, R, τ, môžeme písať $\mathcal{L} = (F, R, \tau)$.

Model (alebo aj *štruktúra*) jazyka je vlastne niečo, kde jazyk (ktorý je vlastne len dohoda o tom, pomocou ktorých symbolov budeme veci zapisovať) interpretujeme, teda dávame špecifickým symbolom nejaký konkrétny význam ako funkciám a reláciám.

Matematickejšie: *štruktúra, (model)* jazyka je usporiadaná dvojica $\mathfrak{A} = (A, I)$, kde A je neprázdna množina, ktorú voláme *nosič* štruktúry, I je zobrazenie, nazývané *interpretácia* jazyka $\mathcal{L}$ na množine A, také, že platí

- definičný obor I je $F \cup R$,
- pre $f \in F_n$ je $I(f) : A^n \to A$ (teda obraz operačného symbolu je operácia na A),
- pre $r \in R_n$ je $I(r) \subset A^n$ (teda obraz relačného symbolu je relácia na A).

Namiesto $I(f)$ budeme tiež používať zápis $f^{\mathfrak{A}}$, f^I alebo (keď nemôže dôjsť k omylu) len f, podobne pre $I(r)$ zápis $r^{\mathfrak{A}}, r^I, r$.

Pozrime sa ešte na to, čo to znamená pre $f \in F_0$. Keďže $A^0 = \{\emptyset\}$, dostávame $f : \{\emptyset\} \to A$, teda $I(f)(\emptyset) \in A$. Keď stotožníme zobrazenie f s týmto jediným prvkom $I(f)(\emptyset)$, tak sa skutočne môžeme pozerať na f ako na konštantu — pevne zvolený prvok z A.

$\mathrm{Term}(\mathcal{L})$ je najmenšia množina slov (teda konečných postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$) taká, že

1. $x \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$ pre každú premennú x,
2. ak $f \in F_n$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$, tak aj $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$.

Zopár poznámok k tejto definícii: Každá konštanta je term, pretože patrí do F_0. Ak $f \in F_2$, budeme písať $t_1 f t_2$ namiesto $f(t_1, t_2)$. Ďalej ak napíšeme $t(x_1, \ldots, x_n)$, tak všetky premenné termu t sú medzi $x_1, \ldots, x_n$.

Táto definícia umožňuje „indukciu“ pre termy, teda keď chceme niečo dokázať/definovať pre všetky termy, tak to stačí urobiť pre premenné a termy typu popísaného v bode 2. Hneď to aj použijeme. Termy interpretujeme v $\mathfrak{A} = (A, I)$ ako operácie $t^I : A^n \to A$ takto:

1. ak $t \equiv x_i$, tak $t^I(a_1, \ldots, a_n) = x^I(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ pre $a_1, \ldots, a_n \in A$,
2. ak $t \equiv f(t_1, \ldots, t_k)$, tak môžeme písať $t_j(x_1, \ldots, x_n)$ pre $j = 1, \ldots, k$ a potom položíme $t^I(a_1, \ldots, a_n) = f^I(t_1^I(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k^I(a_1, \ldots, a_n))$.

Konštantný term je taký, že neobsahuje premenné, a preto t^I je vždy prvkom A.

Dostávame sa konečne k *formulám* jazyka $\mathcal{L}$. $\mathrm{Form}(\mathcal{L})$ je najmenšia množina slov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorú platí

1. ak $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$, tak $(t_1 = t_2) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$,
2. ak $r \in R_n$ a $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$, tak $r(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$,
3. ak $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, tak $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \implies \psi), (\varphi \iff \psi), (\neg\varphi) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$,
4. ak $\varphi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, x je premenná, tak $((\exists x)\varphi), ((\forall x)\varphi) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$.

Formuly definované v prvých dvoch bodoch budeme volať *atomické*. Kvôli zjednodušeniu zápisu formúl nebudeme (v situáciách kde nemôže dôjsť k omylu) dôsledne dodržiavať zátvorkovanie vyplývajúce z definície.

Táto definícia so sebou nesie možnosť pozerať sa na formuly „induktívne“. Pri dokazovaní tvrdení o formulách indukciou však nemusíme ukázať presne body 1.–4. z definície: V bode 3. stačí ukázať indukčný krok napríklad pre formuly typu $\neg\varphi$ a $\varphi \wedge \psi$, pretože zvyšné sú vyjadriteľné pomocou nich. Presnejšie, $\varphi \vee \psi$ je ekvivalentné $\neg\varphi \wedge \neg\psi$, $\varphi \implies \psi$ je ekvivalentné $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ a napokon $\varphi \iff \psi$ je ekvivalentné $\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)$. Podobne v bode 4. stačí dokázať „indukčný krok“ pre jeden z kvantifikátorov (napríklad $\exists$), pretože druhý dostaneme zadarmo jeho negovaním (presnejšie napríklad $(\forall x)\psi(x,\dots)$ je ekvivalentné $\neg(\exists x)(\neg\psi(x,\dots))$.

Výskyt premennej vo formule môže byť dvojakého typu: výskyt *viazaný* (to jest, ak je typu $(Qx)(\dots x\dots)$, kde Q je buď $\forall$ alebo $\exists$) alebo *voľný* (ak nie je viazaný).

Formula sa volá *uzavretá*, ak neobsahuje voľné premenné. V ďalšom budeme predpokladať, že ak napíšeme $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, tak všetky voľné premenné formuly φ sú medzi $x_1,\dots,x_n$. Výnimku tvorí zápis φ, ktorý nutne neznamená, že φ nemá voľné premenné.

Podotkneme, že v rámci akéhosi zjednodušenia zápisov budeme skracovať zápisy presne podľa definície „prirodzeným spôsobom“ (ak nebude môcť dôjsť k omylu), teda napríklad vynechávať zátvorky, zápis $(\forall x)(\forall y)\psi$ na $(\forall x, y)$, atď.

Interpretáciou formúl jazyka $\mathcal{L}$ v štruktúre $\mathfrak{A}$ jazyka $\mathcal{L}$ sú tvrdenia o $\mathfrak{A}$, vlastnosti prvkov štruktúry $\mathfrak{A}$ a relácie medzi prvkami $\mathfrak{A}$.

Induktívne definujeme, čo znamená pre formulu $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ a prvky $a_1,\dots,a_n \in A$, že $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ je *splnená*, respektíve *platí* v $\mathfrak{A}$ (zapisujeme $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1,\dots,a_n)$). Vlastne je to dohoda, že symboly $\wedge, \vee, \implies, \iff, \neg$ budú skutočne označovať logické spojky obvyklého významu.

1. Ak φ je atomická tvaru $t_1 = t_2$, tak môžeme písať $t_1(x_1,\dots,x_n), t_2(x_1,\dots,x_n)$ a kladieme $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1,\dots,a_n)$ práve vtedy, keď $t_1^I(a_1,\dots,a_n) = t_2^I(a_1,\dots,a_n)$.

2. Ak φ je atomická tvaru $r(t_1,\dots,t_k)$, tak môžeme písať $t_i(x_1,\dots,x_n), i = 1,\dots,k$ a kladieme $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1,\dots,a_n)$ práve vtedy, keď $(t_1^I(a_1,\dots,a_n),\dots,t_k^I(a_1,\dots,a_n)) \in r^I$.

3. Ak φ je tvaru $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ (respektíve $\varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \implies \varphi_2, \varphi_1 \iff \varphi_2$), tak môžeme písať $\varphi_1(x_1,\dots,x_n), \varphi_2(x_1,\dots,x_n)$ a kladieme $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1,\dots,a_n)$ práve vtedy, keď $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1(a_1,\dots,a_n)$ *a zároveň* $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(a_1,\dots,a_n)$ (respektíve *alebo, implikuje, práve vtedy keď*).
   Ak φ je tvaru $\neg\varphi_1$, tak môžeme písať $\varphi_1(x_1,\dots,x_n)$ a kladieme $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1,\dots,a_n)$ práve vtedy, keď *nie je pravda, že* $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1(a_1,\dots,a_n)$.

4. Ak φ je tvaru $(\exists y)\psi$ (respektíve $(\forall y)\psi$), tak môžeme písať $\psi(x_1,\dots,x_n,y)$ a kladieme $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1,\dots,a_n)$ práve vtedy, keď *existuje* $b \in A$ taký, že $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1,\dots,a_n,b)$ (respektíve *pre všetky* $b \in A$ platí $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1,\dots,a_n,b)$).

Na záver sa ešte dohodneme, že budeme „dopĺňať všeobecný kvantifikátor pred voľné premenné vo formuli“, teda $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1,\dots,a_n,y_1,\dots,y_m)$ bude platiť práve vtedy, keď $\mathfrak{A} \vDash (\forall y_1,\dots,y_m)\varphi(a_1,\dots,a_n,y_1,\dots,y_m)$.

Ešte si povieme, že *teória* v jazyku $\mathcal{L}$ je ľubovoľná množina $T \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L})$. Prvky T budeme nazývať *axiómy* teórie T. Štruktúra jazyka $\mathcal{L}$ je modelom teórie T (píšeme $\mathfrak{A} \vDash T$), ak každá $\varphi \in T$ je splnená v $\mathfrak{A}$.

Ďalší potrebný pojem je pojem *podštruktúry*. Hovoríme, že štruktúra $\mathfrak{B} = (B, J)$ jazyka $\mathcal{L}$ je podštruktúra štruktúry $\mathfrak{A} = (A, I)$ jazyka $\mathcal{L}$, ak $B \subset A$ a pre každé $f \in F_n$ a $r \in R_n$ platí

$$f^J = f^I\restriction_{B^n}, \quad r^J = r^I \cap B^n.$$

Inými slovami, pre $f \in F_n$ a $r \in R_n$ platí

$$f^J(b_1,\dots,b_n) = f^I(b_1,\dots,b_n) \quad \text{a} \quad (b_1,\dots,b_n) \in r^J \iff (b_1,\dots,b_n) \in r^I$$

pre všetky $b_1, \dots, b_n \in B$. Alebo ekvivalentne, pre každú atomickú formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a pre každé $b_1, \dots, b_n \in B$ platí

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n).$$

Túto situáciu zapisujeme jednoducho $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

Hovoríme, že dve štruktúry $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sú *elementárne ekvivalentné* (píšeme $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), ak pre každú uzavretú formulu φ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathfrak{A} \models \varphi$ práve vtedy, keď $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Zrejme sa v definícii stačí obmedziť na jednu implikáciu z tej ekvivalencie, pretože druhý smer obdržíme zadarmo prechodom k negácii. Totiž, predpokladajme $\mathfrak{A} \models \varphi \implies \mathfrak{B} \models \varphi$. Nech teraz $\mathfrak{B} \models \varphi$. Potom ak $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, tak z predpokladu aj $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$, čo je však spor, teda $\mathfrak{A} \models \varphi$. A je dokázaná aj opačná implikácia.

Definujeme ešte jeden pojem, pre nás asi najužitočnejší. Povieme, že štruktúra $\mathfrak{A}$ jazyka $\mathcal{L}$ je *elementárna podštruktúra* štruktúry $\mathfrak{B}$ toho istého jazyka (píšeme $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$), ak $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ a navyše

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

pre *každú* formulu φ jazyka $\mathcal{L}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$.

Vidno, že keby sme tú vlastnosť o formulách požadovali len pre atomické formuly, dostali by sme len pojem podštruktúry. Ďalej je jasné, že $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Nech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sú dve štruktúry jazyka $\mathcal{L}$. Zobrazenie $h : A \to B$ je *homomorfizmus*, ak pre ľubovoľné $f \in F_n, r \in R_n$ a $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)),$$
$$\text{ak } (a_1, \dots, a_n) \in r^{\mathfrak{A}}, \text{ tak } (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in r^{\mathfrak{B}}.$$

Homomorfizmus h je

- *izomorfizmus*, ak je h bijektívne a inverzné zobrazenie je tiež homomorfizmus.

- *vnorenie*, ak h je izomorfizmus na svoj obraz. Ekvivalentne, ak pre ľubovoľnú atomickú formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ a ľubovoľné $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

  $$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

  Alebo ešte inak ekvivalentne, injektívny homomorfizmus je vnorenie, ak platí navyše

  $$(a_1, \dots, a_n) \in r^{\mathfrak{A}}, \text{ práve vtedy, keď } (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in r^{\mathfrak{B}},$$

  čiže implikácia z definície homomorfizmu sa zmení na ekvivalenciu.

- *elementárne vnorenie*, ak pre ľubovoľnú formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ a ľubovoľné $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

  $$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

1.2 Filtre

Definícia 1. Nech I je množina. Hovoríme, že systém $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$:

- má *vlastnosť konečného prieniku* (FIP), ak $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ pre každú konečnú $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.
- je *filtrom* na I, ak platí
  1. $\emptyset \notin \mathcal{F}, I \in \mathcal{F}$,
  2. ak $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{P}(I)$ a $A \subset B$, potom $B \in \mathcal{F}$,
  3. ak $A, B \in \mathcal{F}$, potom $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- je *ultrafiltrom* na I, ak je maximálnym filtrom vzhľadom na množinovú inklúziu.

Filtre vlastne obsahujú akýmsi spôsobom „veľké množiny“. Napríklad množiny Lebesguovej miery 1 na intervale $[0, 1]$ tvoria filter.

Ultrafiltre majú jednoduchú vlastnosť, ktorou sa líšia od filtrov:

Lema 1.2.1. *Nech I je množina, $\mathcal{F}$ je filter na I. Potom $\mathcal{F}$ je ultrafilter práve vtedy, keď platí*

$$A \subset \mathcal{P}(I) \implies A \in \mathcal{F} \vee (I - A) \in \mathcal{F}.$$

Ak sa vrátime k predstave filtra ako systému „veľkých“ množín, tak ultrafilter napĺňa „čiernobiele“ poňatie vecí; teda buď je množina „veľká“ (vtedy je v ultrafiltri) alebo „malá“ (potom je v ultrafiltri jej doplnok).

Práve ultrafiltre budú jedným zo základných kameňov pomocou ktorých skonštruujeme neštandardné modely. Nasledujúca veta je kľúčová.

Veta 1.2.2 (O ultrafiltroch). *Nech I je množina, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ má FIP. Potom existuje ultrafilter $\mathcal{D}$ na I taký, že $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ (teda, $\mathcal{F}$ sa dá rozšíriť na ultrafilter).*

Predtým, než túto vetu akýmsi spôsobom dokážeme, treba objasniť niektoré súvislosti. Na dôkaz tejto vety totiž môžeme použiť axiómu výberu (AC), je nezávislá od Zermelo–Frænkelovho axiomatického systému teórie množín bez AC. Je však slabšia ako AC, (tj. táto z nej nevyplýva).

V tu prezentovanom prístupe k neštandardnej analýze budeme potrebovať axiómu výberu ešte na jednom mieste (Losova veta). Neštandardná analýza (presnejšie saturované elementárne rozšírenia superštruktúr) sa však dá vybudovať aj bez použitia axiómy výberu, len s použitím tejto vety o ultrafiltroch. Konkrétne, dokáže sa najprv veta o kompaktnosti (na čo stačia ultrafiltre) a potom z nej existencia saturovaných elementárnych rozšírení. Je to však komplikovanejšie a nie tak názorné ako tu prezentovaný prístup.

Takže výsledky dokázané pomocou neštandardnej analýzy sa všetky zakladajú na slabších množinovo–teoretických predpokladoch ako AC — pokiaľ v nich nepoužijeme AC iným spôsobom. Konkrétne aj Hahnova–Banachova veta, ktorú dokážeme v inej kapitole neštandardným spôsobom. Prezentujeme však aj iný dôkaz tejto vety, ktorý nevyužíva neštandardné modely v plnej sile a vystačíme v ňom s vetou o ultrafiltroch.

Miesta, v ktorých využijeme AC pri budovaní teórie, označíme a aj odlíšime výsledky na ktoré AC netreba a na ktoré treba.

Dôkaz. Prvý krok dôkazu — rozšírenie $\mathcal{F}$ na filter sa dá realizovať jednoducho bez nejakých zvláštnych predpokladov. Proste do $\mathcal{F}$ najprv „pridáme“ všetky konečné prieniky množín z $\mathcal{F}$ (týmto dosiahneme splnenie 3.), potom všetky nadmnožiny množín v $\mathcal{F}$ (týmto splníme 2.). Platnosť 1. plynie z toho, že pôvodné $\mathcal{F}$ malo FIP.

V ďalšom použijeme Zornovu lemu, čo je známy ekvivalent AC. Hovorí, že v neprázdnej čiastočne usporiadanej množine, v ktorej každý reťazec je zhora ohraničený, existuje maximálny prvok.

Môžeme teda predpokladať, že $\mathcal{F}$ je filter. Zoberme množinu všetkých filtrov na I, ktoré obsahujú $\mathcal{F}$. Táto množina je čiastočne usporiadaná množinovou inklúziou, je neprázdna (obsahuje samotné $\mathcal{F}$). Treba ešte ukázať, že každý reťazec je zhora ohraničený. Zoberme teda reťazec filtrov K. Platí teda buď $F_j \subset F_k$ alebo $F_k \subset F_j$ pre každú dvojicu $F_j, F_k \in K$. Zoberme teraz $F = \bigcup K$. Je to zase systém podmnožín množiny I. Iste $\mathcal{F} \subset F_j \subset F$ pre všetky $F_j \in K$. Ak teraz ešte ukážeme, že F je filter, tak bude toto F jedným z horných ohraničení nášho reťazca.

Vlastnosť 1 je triviálna, lebo $\forall F_j \in K : \emptyset \notin F_j$ a $I \in F_j$. Vlastnosť 2: ak $A \in F$, $B \in \mathcal{P}(I)$, tak pre dáke $F_j \in K$ platí $A \in F_j$, potom z filtrovosti F_j máme $B \in F_j$ a teda aj $B \in F$. No a napokon vlastnosť 3: nech $A, B \in F$. Potom pre nejaké $F_j, F_k \in K : A \in F_j, B \in F_k$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $F_j \subset F_k$, potom však $A \in F_k$, z čoho plynie $A \cap B \in F_k$, čiže $A \cap B \in F$. Hotovo.

V tomto momente použitím Zornovej lemy máme zaručenú existenciu maximálneho prvku v množine všetkých filtrov na I obsahujúcich $\mathcal{F}$. Označme ho $\mathcal{D}$. To je hľadaný ultrafilter — je totiž maximálny taký, že obsahuje $\mathcal{F}$. Keby však keby existoval filter, ktorý by ho obsahoval, tak by iste obsahoval aj $\mathcal{F}$, teda musel by to byť zase len $\mathcal{D}$. □

1.3 Neštandardné rozšírenia

Majme daný jazyk $\mathcal{L}$, množinu I, systém štruktúr $(\mathfrak{A}_i = (A_i, J_i))_{i \in I}$, a na I filter D.

Označme $C = \prod_{i \in I} A_i$. Na tejto množine definujme reláciu $=_D$ takto: dve funkcie $h, g \in C$ (pripomíname, že prvky súčinu $\prod_{i \in I} A_i$ sú všetky funkcie $g : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ také, že $g(i) \in A_i$ $\forall i \in I$) budú v relácii (tj. $h =_D g$), ak

$$\{i \in I \mid h(i) = g(i)\} \in D.$$

Vďaka tomu, že D je filter, vidno, že $=_D$ je reláciou ekvivalencie na C. Množinu tried ekvivalencie podľa $=_D$ označme $\prod_{i \in I} A_i / D$, jej prvok s reprezentantom g značme g^D alebo $[g]_D$. Ak si spomenieme na chápanie filtra ako systému „veľkých“ množín, tak vlastne dva prvky priameho súčinu C sú v jednej triede, ak sa rovnajú na množine z filtra, teda na „veľkej“ množine.

Definícia 2. *Redukovaný súčin* štruktúr $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ podľa filtra D (značíme $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / D$) je model jazyka $\mathcal{L}$ popísaný nasledovne:

(i) Nosič $\mathfrak{A}$ je množina $A = \prod_{i \in I} A_i / D$.

(ii) Ak $f \in F_n$, $g_1^D, \ldots, g_n^D \in A$, tak položme

$$f^{\mathfrak{A}}(g_1^D, \ldots, g_n^D) = [\langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i))\rangle_{i \in I}]_D.$$

Teda vlastne hodnota f na nejakej n-tici tried je trieda určená prvkom (označme ho $f(g_1, \ldots, g_n)$), ktorý je po zložkách $f(g_1, \ldots, g_n)(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)$.

(iii) Ak $r \in R_n$, $g_1^D, \ldots, g_n^D \in A$, tak položme

$$(g_1^D, \ldots, g_n^D) \in r^{\mathfrak{A}} \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \{i \in I \mid (g_1(i), \ldots, g_n(i)) \in r^{\mathfrak{A}_i}\} \in D.$$

Čiže n-tica tried je v relácii, ak je v relácii „dosť veľa“ zložiek v príslušných štruktúrach.

Ak D je ultrafilter, tak hovoríme o *ultraprodukte* a ak navyše $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}$ (pre nejaké $\mathfrak{B}$), tak hovoríme o *ultramocnine* — tú značíme $\mathfrak{B}^I/D$.

Treba ešte overiť, že táto definícia je korektná, teda že triedy popísané v (ii) a (iii) nezávisia od výberu reprezentantov. Na to slúži nasledujúca

Lema 1.3.1. *Nech $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n \in C$ sú také, že $g_1 =_D h_1, \ldots, g_n =_D h_n$. Potom platia nasledujúce vzťahy:*

$$\langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i))\rangle_{i\in I} =_D \langle f^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))\rangle_{i\in I}, \tag{1.1}$$

$$G = \{i \in I \mid (g_1(i), \ldots, g_n(i)) \in r^{\mathfrak{A}_i}\} \in D \iff H = \{i \in I \mid (h_1(i), \ldots, h_n(i)) \in r^{\mathfrak{A}_i}\} \in D. \tag{1.2}$$

Dôkaz. Tak sa pozrime na (1.1). Z predpokladov vety vyplýva, že množiny $E_k = \{i \in I \mid g_k(i) = h_k(i)\}$ patria do D. Z uzavretosti filtra na prieniky vieme, že aj množina $E_1 \cap \cdots \cap E_n \in D$. Lenže pre index i z tejto množiny platí $g_1(i) = h_1(i), \ldots, g_n(i) = h_n(i)$, a teda iste aj $f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)) = f^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))$. Čiže platí

$$E_1 \cap \cdots \cap E_n \subset \{i \in I \mid f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)) = f^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))\}.$$

Z vlastnosti filtra máme, že posledne spomenutá množina je tiež v D, čo je podľa definície presne (1.1).

Na dôkaz (1.2) stačí dokázať jednu implikáciu, druhá sa dokáže úplne analogicky (zámenou g za h). Nech teda povedzme $G \in D$. Zase použijeme množiny $E_k \in D$. Z uzavretosti filtra na konečné prieniky máme, že množina $E_1 \cap \cdots \cap E_n \cap G$ patrí do D. Lenže

$$E_1 \cap \cdots \cap E_n \cap G = \{i \in I \mid g_1(i) = h_1(i), \ldots, g_n(i) = h_n(i), (g_1(i), \ldots, g_n(i)) \in r^{\mathfrak{A}_i}\},$$

ale prepísaním podmienky v určení tejto množiny dostaneme vyjadrenie

$$E_1 \cap \cdots \cap E_n \cap G = \{i \in I \mid g_1(i) = h_1(i), \ldots, g_n(i) = h_n(i), (h_1(i), \ldots, h_n(i)) \in r^{\mathfrak{A}_i}\}.$$

No a z tohto už je zrejmá inklúzia $E_1 \cap \cdots \cap E_n \cap G \subset H$, čiže z vlastností filtra dostávame požadované $H \in D$. □

Nasledujúca veta je štandardný nástroj na narábanie s ultraproduktmi. Bohužiaľ, na plnú platnosť tejto vety potrebujeme axiómu výberu. Vetu aj tak vyslovíme a dokážeme. Ako sme už spomenuli, jej použitie pri neštandardnej analýze sa dá obísť, ale za cenu menšej názornosti konštrukcie neštandardného rozšírenia.

Veta 1.3.2 (Losova). *(AC) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk, I je množina, D je ultrafilter na nej a $(\mathfrak{A}_i = (A_i, J_i))_{i\in I}$ je systém štruktúr jazyka $\mathcal{L}$. Označme $\mathfrak{A} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/D$. Označme ďalej pre formulu $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ a $h_1, \ldots, h_n \in C = \prod_{i\in I} A_i$:*

$$[\psi(h_1, \ldots, h_n)] = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\}\,.$$

Potom pre $h_1, \ldots, h_n \in C$ platí

$$\mathfrak{A} \models \psi(h_1^D, \ldots, h_n^D) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad [\psi(h_1, \ldots, h_n)] \in D.$$

Dôkaz. Dokážme toto tvrdenie indukciou cez výstavbu formuly ψ. Využijeme to, čo sme poznamenali už pri definícii formúl, a totiž, že indukčný krok stačí robiť pre logické spojky $\neg, \wedge$ a kvantifikátor $\exists$.

Pre atomické formuly (body 1. a 2. z definície formúl) tvrdenie platí triviálne z definície interpretácie štruktúry $\mathfrak{A}$.

Zamerajme sa na dôkaz ostatných dvoch bodov z definície formúl.

Bod 3.a. Nech ψ je typu $\neg\varphi(x_1, \dots, x_n)$, pričom pre φ tvrdenie platí. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{A} \models \psi(h_1^D, \dots, h_n^D) \\
\mathfrak{A} \models \neg\varphi(h_1^D, \dots, h_n^D) \\
\text{nie je pravda, že } \mathfrak{A} \models \varphi(h_1^D, \dots, h_n^D) \\
\text{(tu používame indukčný predpoklad)} \quad [\varphi(h_1, \dots, h_n)] \notin D \\
\text{(použijeme vlastnosť ultrafiltra)} \quad \big(I - [\varphi(h_1, \dots, \bar{h}_n)]\big) \in D \\
\text{(keď vezmeme do úvahy definíciu } [\varphi]\text{)} \quad [\neg\varphi(h_1, \dots, h_n)] \in D \\
[\psi(\bar{h}_1^D, \dots, h_n^D)] \in D.
\end{gathered}$$

Bod 3.b. Nech ψ je typu $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \varphi_2(x_1, \dots, x_n)$, pričom pre φ_1, φ_2 tvrdenie platí. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{A} \models \psi(h_1^D, \dots, h_n^D) \\
\mathfrak{A} \models \big(\varphi_1(h_1^D, \dots, h_n^D) \wedge \varphi_2(h_1^D, \dots, h_n^D)\big) \\
\mathfrak{A} \models \varphi_1(h_1^D, \dots, h_n^D) \text{ a zároveň } \mathfrak{A} \models \varphi_2(h_1^D, \dots, h_n^D) \\
\text{(z indukčného predpokladu)} \quad [\varphi_1(h_1, \dots, h_n)] \in D \text{ a zároveň } [\varphi_2(h_1, \dots, h_n)] \in D.
\end{gathered}$$

Keďže platí (vo všeobecnosti)

$$\begin{aligned}
\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi_1(h_1, \dots, h_n) \wedge \varphi_2(h_1, \dots, h_n)\} &= \\
&= \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi_1(h_1, \dots, h_n)\} \cap \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi_2(h_1, \dots, h_n)\},
\end{aligned}$$

tak posledne napísaný výraz v reťazci ekvivalencií je ekvivalentný

$$[\varphi_1(h_1, \dots, h_n) \wedge \varphi_2(h_1, \dots, h_n)] \in D,$$

čo je ale to isté, ako $[\psi(h_1, \dots, h_n)] \in D$.

Bod 4. Nech ψ je typu $(\exists x)\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$, pričom pre φ tvrdenie platí. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{A} \models \psi(h_1^D, \dots, h_n^D) \\
\mathfrak{A} \models (\exists x)\varphi(x, h_1^D, \dots, h_n^D) \\
\text{existuje také } \alpha \in C, \text{ že } \mathfrak{A} \models \varphi(\alpha^D, h_1^D, \dots, h_n^D).
\end{gathered}$$

Použijúc indukčný predpoklad máme, že je to ekvivalentné s

$$\text{existuje také } \alpha \in C, \text{ že } [\varphi(\alpha, h_1, \dots, h_n)] \in D. \tag{1.3}$$

Z definície však platí $[\varphi(\alpha, h_1, \dots, h_n)] \subset [(\exists x)\varphi(x, h_1, \dots, h_n)] = [\psi(h_1, \dots, h_n)]$. Z toho plynie $[\psi(h_1, \dots, h_n)] \in D$. Tým je dokázaná jedna implikácia zo znenia vety. Dokážme teraz druhú:
Predpokladajme, že $[(\exists x)\varphi(x, h_1, \dots, h_n)] \in D$. Definujme funkciu $f \in C$ nasledovne (tu použijeme axiómu výberu, ktorá zaručí jej existenciu)

$$f(i) = \begin{cases} \text{akékoľvek } t \in A_i & \text{ak v } \mathfrak{A}_i \text{ neplatí } (\exists x)\varphi(x, h_1(i), \dots, h_n(i)) \\ \text{vhodné } t \in A_i & \text{ak } \mathfrak{A}_i \models (\exists x)\varphi(x, h_1(i), \dots, h_n(i)) \text{ a } \mathfrak{A}_i \models \varphi(t, h_1(i), \dots, h_n(i)). \end{cases}$$

Zrejme teraz $[\varphi(t, h_1, \dots, h_n)] = [(\exists x)\varphi(x, h_1, \dots, h_n)] \in D$, čo je však 1.3. Teda dokázali sme aj druhú implikáciu. $\square$

V ďalšom sa budeme venovať hlavne ultramocninám. Nech teda znova $\mathfrak{A} = (A, J)$ je štruktúra jazyka $\mathcal{L}$, I je množina a D je ultrafilter na nej. Máme teda novú štruktúru $\mathfrak{A}^I/D$. Definujeme *prirodzené vnorenie* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^I/D$ jednoducho tak, že pre $a \in A$ položíme $h(a) = [\langle a \rangle_{i \in I}]_D$ (trieda konštantnej funkcie s hodnotou a, označme tú funkciu $\bar{a}$).

Veta 1.3.3. *Popísané zobrazenie h je elementárne vnorenie, teda $\mathfrak{A}$ je elementárna podštruktúra $\mathfrak{A}^I/D$.*

Dôkaz. Nech $\psi(x_1, \dots, x_n)$ je formula jazyka $\mathcal{L}$, $a_1, \dots, a_n \in A$. Potom však $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$ je ekvivalentné s

$$[\psi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)] = I \in D,$$

teda z Losovej vety máme, že je to ekvivalentné s

$$\mathfrak{A}^I/D \models \psi(\bar{a}_1^D, \dots, \bar{a}_n^D), \quad \text{čiže} \quad \mathfrak{A}^I/D \models \psi(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

Zachovávanie formuly $(x = y)$ znamená, že h je prosté zobrazenie; zachovávanie atomických formúl znamená, že ide o vnorenie. Elementárnosť sme už dokázali. $\square$

Týmto sme vlastne definovali neštandardné elementárne rozšírenie štruktúry $\mathfrak{A}$ – menovite $\mathfrak{A}^I/D$. Toto v ďalšom budeme značiť $*\mathfrak{A}$. Podobne aj vnorenie h budeme značiť jednoducho $*$ (teda namiesto $h(a)$ píšeme $*a$). Ďalej, keďže h je bijekcia na svoj obraz, tak identifikujeme prvky $a \in A$ s $h(a) = *a \in A^I/D$, a v tomto ponímaní má zmysel zápis $A \subset *A$, a to je dôvod, prečo to nazývame „rozšírenie".

Pozastavme sa na chvíľu pri formulách. Totiž vo formulách môžu vystupovať nejaké funkčné a relačné znaky jazyka $\mathcal{L}$. Tieto znaky majú nejakú interpretáciu v štruktúre $\mathfrak{A}$, a nejakú inú interpretáciu v štruktúre $*\mathfrak{A}$. Druhá menovaná samozrejme závisí od prvej menovanej, a to presne spôsobom popísaným v definícii $\mathfrak{A}^I/D$. Ak narábame len s jednou štruktúrou, tak obyčajne vynechávame značenie interpretácie znakov. Aby sme však vedeli lepšie rozlišovať medzi $\mathfrak{A}$ a $*\mathfrak{A}$, tak občas budeme značiť interpretáciu v $*\mathfrak{A}$ hviezdičkou (napríklad $f \in F_n$ budeme v kontexte $*\mathfrak{A}$ označovať $*f$). Táto konvencia sa ukáže ako užitočná hlavne pri konštantách a znakoch, ktoré označujú konkrétne objekty v štruktúre.

Potom vlastne môžeme hovoriť o $*$-transformácii formuly ψ jazyka $\mathcal{L}$, v ktorom proste nahradíme funkčné a relačné znaky ich $*$-variantami. Takto transformovanú formulu budeme značiť $*\psi$. V skutočnosti tým zavádzame akoby dve mená pre ten istý symbol jazyka $\mathcal{L}$ (pretože $*$-transformácia formuly ψ už samozrejme nebude vo všeobecnosti formula jazyka $\mathcal{L}$), jedno meno používame v jednom kontexte a druhé v druhom.

To, že $*\mathfrak{A}$ je elementárne rozšírenie $\mathfrak{A}$ vlastne znamená, že všetky vlastnosti štruktúry popísateľné formulami, sú splnené aj v rozšírenej štruktúre. Napíšme tento fakt ešte raz explicitne:

Princíp prenosu. *Nech φ je uzavretá formula jazyka $\mathcal{L}$. Potom $\mathfrak{A} \models \varphi$ práve vtedy, keď $*\mathfrak{A} \models *\varphi$.*

Dôkaz. Toto tvrdenie je jednoduchým dôsledkom vety 1.3.3. □

1.4 Vlastnosti rozšírení reálnych čísel

Aplikujme teraz túto konštrukciu na reálne čísla. Majme jazyk $\mathcal{L}$ pozostávajúci z dvoch binárnych funkcionálnych symbolov $+, \cdot$ (plus a krát) a jedného dvojmiestneho relačného symbolu $<$. Nech $\mathbb{R}$ je model tohto jazyka so symbolmi interpretovanými prirodzene ako sčítanie, násobenie a usporiadanie reálnych čísel.

Ultrafilter D na množine I nazveme *voľným*, ak neobsahuje žiadnu konečnú množinu. Ak I je nekonečná množina, tak na nej iste existuje aspoň jeden taký ultrafilter. Totiž, nech $\mathcal{F}$ je systém všetkých podmnožín I, ktorých doplnok je konečná množina. $\mathcal{F}$ má iste vlastnosť konečného prieniku, a preto sa podľa vety o ultrafiltroch dá rozšíriť na ultrafilter. Tento bude iste voľný, pretože ak by obsahoval nejakú konečnú množinu (povedzme B), tak obsahuje aj jej doplnok ($I - B$, jasné z konštrukcie), a preto aj prienik $B \cap (I - B) = \emptyset$. To je však spor.

Vezmime teda nekonečnú množinu $\mathbb{N}$, voľný ultrafilter D na nej, a vyrobme rozšírenie $*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/D$.

Predtým, než pristúpime k závažnejším výsledkom si treba uvedomiť niekoľko faktov. Vyrobili sme neštandardné rozšírenie, čo je vlastne nejaké rozšírenie, ktoré je elementárne ekvivalentné pôvodnému modelu. To znamená, že všetky vlastnosti, ktoré mal pôvodný model a ktoré sa dajú vyjadriť formulou príslušného jazyka, bude mať aj neštandardné rozšírenie.

Okrem iného z toho plynie, že napríklad $*\mathbb{R}$ bude lineárne usporiadané pole s operáciami a usporiadaním, ktoré sú predĺžením pôvodných operácií $(+, \cdot)$ a usporiadania $(<)$ na $\mathbb{R}$. Axiómy platné pre pôvodné operácie a usporiadanie, ktoré robia z $\mathbb{R}$ lineárne usporiadané pole, sú všetko formuly prvého rádu. Vďaka princípu prenosu teda platia pre príslušné predĺženia v $*\mathbb{R}$. V ďalšom teda nebudeme rozlišovať medzi pôvodnými operáciami a reláciami a ich predĺžením; budeme ich prosto značiť ako v $\mathbb{R}$ (napríklad $+, \cdot, <$, atď.).

Treba si ešte uvedomiť, že sú vlastnosti $\mathbb{R}$, ktoré nie sú prvého rádu (ako napríklad to, že každá zhora ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum). Prvého rádu nie je preto, lebo kvantifikujeme cez množiny a nie prvky. Tieto vlastnosti sa dajú tiež samozrejme vo $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ zapísať formulou, a teda podľa princípu prenosu platí ich $*$-forma v $*\mathbb{V}(\mathbb{R})$. Má to ale samozrejme istý háčik, ktorý sa objaví pri podrobnejšom pohľade. Vedie to k pojmu internej množiny, o ktorom bude reč neskôr.

Najprv ukážme, že konštrukcia, ktorú sme spravili, nám skutočne dá niečo nové pri takejto voľbe indexovej množiny a ultrafiltra.

Definícia 3. Prvok $x \in \mathfrak{A}^I/D$ nazveme *štandarným*, ak je tvaru $*y$ pre dáke $y \in \mathfrak{A}$.

Veta 1.4.1. *Nech D je voľný ultrafilter na $\mathbb{N}$. Potom $*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/D$ je vlastné rozšírenie $\mathbb{R}$, teda existuje neštandardný prvok $x \in *\mathbb{R} - \mathbb{R}$.*

Dôkaz. Prvky $*\mathbb{R}$ sú triedy ekvivalencie postupností reálnych čísel. Zoberme teraz postupnosť $x(i) = \frac{1}{i}$. Je prvok x^D štandardný? Ak by bol, tak podľa Losovej vety by

$$[x(i) = a] \in D$$

pre nejaké $a \in \mathbb{R}$. Lenže množina typu $[x(i) = a]$ je vždy jednoprvková, pretože postupnosť x je prostá. Teda iste nepatrí do ultrafiltra D, lebo D je voľný. □

Poznámka. Prvok x^D z predchádzajúceho dôkazu je zaujímavý ešte aj inak — je totiž „nekonečne malý“. Zrejme totiž $x^D > 0$ pretože $[x(i) > 0] = I \in D$, ale pre každé reálne $a > 0$ platí tiež, že len konečne veľa členov postupnosti x je väčších alebo rovných a, teda $[x(i) < a] \in D$. Z toho plynie, že $x^D < \bar{a}^D = *a$. Teda x^D je menšie ako ktorékoľvek kladné reálne číslo, ale stále väčšie ako nula.

Poznámka. Analogicky zrejme v $*\mathbb{R}$ existujú aj „nekonečne veľké“ prvky. Jeden z nich je napríklad x^D, kde $x(i) = i$.

Definícia 4. Prvok $x \in *\mathbb{R}$ nazveme *nekonečne veľký*, ak platí $a < |x|$ pre všetky $a \in \mathbb{R}$. Podobne, nazveme ho *nekonečne malý* (alebo *infinitezimálny*), ak platí $0 < |x| < a$ pre všetky kladné $a \in \mathbb{R}$. Napokon, nazveme ho *konečný*, ak platí $|x| < a$ pre dáke $a \in \mathbb{R}$.

Lema 1.4.2. *Nech c, d sú nekonečne malé, x, y konečné a a, b nekonečné čísla v $*\mathbb{R}$. Potom platí*

- *nasledujúce sú nekonečne malé: $c + d$, cd, cx, $\frac{1}{a}$.*
- *nasledujúce sú konečné: $d + x$, $x + y$, xy.*
- *nasledujúce sú nekonečne veľké: $\frac{1}{d}$ (ak $d \neq 0$), $a + b$ (ak majú rovnaké znamienko), ab.*
- *jediné reálne nekonečne malé číslo je 0.*

Dôkaz. Tvrdenie je jednoduchým dôsledkom predošlej definície. □

Definícia 5. Pre $x, y \in *\mathbb{R}$ budeme hovoriť, že sú *nekonečne blízke* (značíme $x \approx y$), ak $x - y$ je nekonečne malé.

Veta 1.4.3 (Štandardná časť). *Ak $x \in *\mathbb{R}$ je konečné, potom existuje jediné $a \in \mathbb{R}$ také, že $a \approx x$.*

Dôkaz. Množina $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\}$ je zhora ohraničená (keďže x je konečné) podmnožina $\mathbb{R}$, čiže má supremum. Označme ho a.

Ukážeme, že $a \approx x$. Nech $\epsilon > 0$ je reálne číslo. Potom $a - \epsilon$ nie je horné ohraničenie A, teda existuje $y \in A$, že $a - \epsilon < y \leq x$. Číslo $a + \epsilon$ však už nepatrí do A, preto $a + \epsilon > x$. Spolu dostávame

$$-\epsilon < a - x < \epsilon.$$

Toto platí pre každé $\epsilon > 0$ reálne, teda $a - x$ je nekonečne malé. Tým je zaručená existencia.

Pozrime sa na jednoznačnosť. Nech $a_1 \approx x$, $a_2 \approx x$ pre $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Teda $x - a_1$, $x - a_2$ sú nekonečne malé, teda aj $a_1 - a_2$ je nekonečne malé a zároveň reálne. Máme teda, že $a_1 - a_2 = 0$, čiže $a_1 = a_2$. □

Poznámka. Relácia $\approx$ je zrejme relácia ekvivalencie na $*\mathbb{R}$. Symetričnosť a reflexivitu vidno priamo z definície a tranzitívnosť je ukázaná v posledom dôkaze.

Poznámka. Označme množinu nekonečne malých čísel M_0, množinu konečných čísel M_1. Predošlá lema a veta vlastne hovoria, že M_0 je konvexný maximálny ideál v M_1. Ďalej M_1/M_0 je izomorfné poľu $\mathbb{R}$.

Definícia 6. Nech $x \in *\mathbb{R}$. Ak existuje reálne číslo a také, že $x \approx a$, tak a nazývame *štandardnou časťou* x, píšeme $a = \mathrm{st}(x)$ alebo $a = {}^\circ x$.

Veta 1.4.4. *Ak $x, y \in *\mathbb{R}$ sú konečné, tak platí:*

- ${}^\circ(x + y) = {}^\circ x + {}^\circ y$,
- ${}^\circ(xy) = {}^\circ x {}^\circ y$,
- *ak* $x \le y$, *potom* ${}^\circ x \le {}^\circ y$.

Dôkaz. Tvrdenie je jednoduchým dôsledkom lemy 1.4.2. □

1.5 Hahnova–Banachova veta bez axiómy výberu

Trochu odbočíme od základných definícií a tvrdení, a aplikujeme to, čo už vieme, na dôkaz Hahnovej–Banachovej vety bez použitia axiómy výberu. V jednej z nasledujúcich odsekov uvedený dôkaz je síce názorný, ale potrebuje neštandardnú analýzu v plnej sile. Táto sa dá vybudovať bez (AC), ale v tejto práci to neurobíme, preto poskytneme ešte iný dôkaz. Tento síce bude používať neštandardné modely, avšak nie v plnej sile. Prístup uvedený v tomto odseku ukázal W. A. J. Luxemburg v [14].

Budeme potrebovať neštandardné modely reálnych čísel. Konštrukcia bude rovnaká ako v odseku 1.3. V predošlom odseku sme dokázali niekoľko faktov o $*\mathbb{R}$, avšak za použitia Losovej vety. Tomu sa chceme teraz vyhnúť, preto základné tvrdenia o $*\mathbb{R}$ zrevidujeme.

Definujme na množine $*\mathbb{R}$ operácie $+$ a $\cdot$, reláciu $\le$ takto: pre $a^D, b^D, c^D \in *\mathbb{R}$ bude platiť $a^D + b^D = c^D$ ak

$$\{x \in I \mid a(x) + b(x) = c(x)\} \in D.$$

Obdobne pre $a^D b^D = c^D$ a $a^D \le b^D$. Vďaka tomu, že D je filter, je táto definícia „dobrá“, teda nezáleží od výberu reprezentantov tried.

V tomto momente je ľahké overiť, že $*\mathbb{R}$ spolu s predošlom odstavci definovanými $+, \cdot, \le$ je lineárne usporiadané pole. (Stačí postupne overiť všetky axiómy lineárne usporiadaného poľa.) Navyše (ak si spomenieme na vnorenie $*$ z prvej kapitoly) platí $\mathbb{R} \subset *\mathbb{R}$. Upustíme od značenia $a^D, b^D, \ldots$ a budeme prvky značiť prosto $a, b, \ldots$

Definovali sme vlastne ultramocninu štruktúry $\mathbb{R}$ — neštandardné rozšírenie. Prirodzeným spôsobom na ňom môžeme definovať ďalšie funkcie a relácie ako napríklad $|\cdot|$, $\ge$, $<$, ^{2}, atď.

Označíme opäť M_0 množinu tých $a \in *\mathbb{R}$, že $|a| < r$ pre každé $r \in \mathbb{R}$ kladné. Budeme ju nazývať nekonečne malé čísla. Ďalej M_1 bude množina tých $a \in *\mathbb{R}$, pre ktoré existuje $r \in \mathbb{R}$ také, že platí $|a| < r$. Tieto budú konečné čísla. Ľahko možno overiť, že M_1 je podokruh $*\mathbb{R}$ a M_0 je jeho konvexný maximálny ideál. Napokon platí, že M_1/M_0 je izomorfné s $\mathbb{R}$. Kanonický homomorfizmus budeme nazývať štandardnou časťou a značiť (ako sme zvyknutí) st alebo $^\circ$. Nie je ťažké overiť, že toto zobrazenie zachováva neostré nerovnosti a že skutočne štandardná časť konečného prvku je to jediné reálne číslo, ktoré je k nemu „nekonečne blízko“.

Pristúpme k Hahnovej–Banachovej vete.

Definícia 7. Nech E je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Zobrazenie $p : E \to \mathbb{R}$ sa nazýva *sublineárny funkcionál* na E, ak pre všetky $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ platí

$$p(\lambda x) = \lambda p(x),$$
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Veta 1.5.1 (Hahnova–Banachova). *Nech E je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, S jeho podpriestor, $f : S \to \mathbb{R}$ lineárny funkcionál. Nech ďalej $p : E \to \mathbb{R}$ je sublineárny funkcionál na E a platí $\forall x \in E : f(x) \leq p(x)$. Potom existuje lineárny funkcionál $\bar{f}$ na E taký, že $\bar{f}\restriction_S = f$ a $\forall x \in E$ platí $\bar{f}(x) \leq p(x)$.*

Dôkaz. Nech H je množina všetkých lineárnych funkcionálov h definovaných na nejakom lineárnom podpriestore priestoru E takých, že spĺňajú

1. definičný obor obsahuje S,
2. platí $f(x) = h(x)$ pre všetky $x \in S$,
3. platí $h(x) \leq p(x)$ na celom definičnom obore h.

Iste $H \neq \emptyset$, pretože aspoň f spĺňa tieto vlastnosti.

Zoberme si $x \in E$. Označme H_x tú podmnožinu H, že pre $h \in H_x$ platí, že definičný obor h obsahuje x. Platí, že $H_x \neq \emptyset$. Postupom uvedeným v leme 2.1.2 totiž môžeme definičný obor funkcionálu rozšíriť o jednorozmerný podpriestor generovaný x-om. Takže iste existuje funkcionál, ktorý spĺňa požadované vlastnosti.

Systém množín $\{H_x\}_{x\in E}$ je iste neprázdny. Dokážeme, že má vlastnosť konečného prieniku. Ak si totiž vezmeme konečný počet množín $H_{x_1}, H_{x_2}, \ldots, H_{x_n}$, tak môžeme zase postupným aplikovaním postupu z lemy 2.1.2 (n-krát) rozšíriť funkcionál f na lineárny obal množiny $S \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tento funkcionál iste patrí do každého H_{x_i} pre $i = 1, \ldots, n$, takže aj do ich prieniku. Prienik je tým pádom neprázdny.

V tomto momente použijeme vetu o ultrafiltroch a rozšírime systém $\{H_x\}_{x\in E}$ na ultrafilter D na H. Môžme teda ďalej skonštruovať $*\mathbb{R} = \mathbb{R}^H/D$.

Definujeme teraz funkcionál $\tilde{f} : E \to *\mathbb{R}$. Pre každé $x \in E$ si všimnime prvok mocniny $g_x \in \mathbb{R}^H$ definovaný takto:

$$g_x(h) = \begin{cases} h(x) & \text{pre } h \in H_x \\ 0 & \text{pre ostatné } h \end{cases}$$

Toto zobrazenie určuje svoju triedu ekvivalencie v $*\mathbb{R} = \mathbb{R}^H/D$, je to práve g_x^D. (Na okraj poznamenajme, že v definícii g_x záleží len na tom, ako je definované pre $h \in H_x$, pretože $H_x \in D$, a teda $H - H_x \notin D$.) Funkcionál $\tilde{f}$ definujme $\tilde{f}(x) = g_x^D$ pre každé $x \in E$.

Pozrieme sa na niektoré vlastnosti $\tilde{f}$. $*\mathbb{R}$ je nadpole $\mathbb{R}$, môžeme ho teda chápať ako vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Ukážeme, že $\tilde{f}$ je lineárne zobrazenie z E do $*\mathbb{R}$. Zoberme teda $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a dokážme $\tilde{f}(\alpha x + \beta y) = \alpha\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(y)$.

Ale $\tilde{f}(\alpha x + \beta y) = g_{\alpha x+\beta y}^D \in *\mathbb{R}$. Z definície vieme, že $g_{\alpha x+\beta y}(h) = h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y)$ pre $h \in H_{\alpha x+\beta y}$, pretože h je lineárny funkcionál.

Podobne $\alpha\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(y) = \alpha g_x^D + \beta g_y^D \in *\mathbb{R}$, ďalej $\alpha g_x(h) + \beta g_y(h) = \alpha h(x) + \beta h(y)$ pre $h \in H_x \cap H_y$.

Teda vidno, že hodnoty zobrazení $g_{\alpha x+\beta y}$ a $\alpha g_x + \beta g_y$ sa rovnajú aspoň na množine $H_{\alpha x+\beta y} \cap H_x \cap H_y$, ktorá je ako prienik množín z D iste z ultrafiltra D. To však znamená, že určujú rovnakú triedu ekvivalencie a teda $\tilde{f}(\alpha x + \beta y) = \alpha\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(y)$. Tým je linearita dokázaná.

Ďalej o $\tilde{f}$ dokážeme, že $\tilde{f}(x) = f(x)$ pre $x \in S$. (Pripomenieme, že $\mathbb{R}$ chápeme ako vnorené do $*\mathbb{R}$ tak, že $a \in \mathbb{R}$ je prvok $*\mathbb{R}$ určený konštantným zobrazením $\bar{a} : H \to \mathbb{R}$, $\bar{a}(h) = a$.)

Zase podľa definície pre $x \in S$ platí $\tilde{f}(x) = g_x^D$ a $g_x(h) = f_u(x) = \overline{f(x)}$ pre $h \in H_x \in D$. Teda na množine z ultrafiltra je g_x rovné konštantnému zobrazeniu $\overline{f(x)}$, takže skutočne $\tilde{f}(x) = g_x^D = \overline{f(x)}^D = f(x)$.

Teraz dokážeme, že $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pre všetky $x \in E$. Podobne ako v predošlom odstavci $\tilde{f}(x) = g_x^D$ a $g_x(h) = h(x) \leq p(x)$ pre $h \in H_x \in D$, teda z definície $\leq$ na $*\mathbb{R}$ platí $\tilde{f}(x) = g_x^D \leq \overline{p(x)}^D = p(x)$.

Na záver ešte ukážeme, že $\tilde{f}(x)$ je konečné pre každé $x \in E$. To je však jednoduché, pretože $-p(-x) \leq -\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x) \leq p(x)$.

Teraz stačí položiť $\bar{f} = \mathrm{st}(\tilde{f})$. Tento funkcionál iste spĺňa všetky požadované vlastnosti, pretože zobrazenie st je homomorfizmus, ktorý zachováva neostré nerovnosti. Hotovo. □

1.6 Superštruktúry

Aby sme vedeli akýmsi spôsobom „rozšíriť“ svet v ktorom chceme skúmať matematické objekty, musíme si najprv ujasniť, čo to vlastne je. Nech S je množina „indivíduí“ — akýchsi matematických objektov, o ktorých presnejšie nemusíme vedieť, čo to vlastne je. (Apriori nepredpokladáme, že sú to sami o sebe množiny, teda na ne nebudeme aplikovať žiadne množinové operácie.) Takýmito indivíduami môžu byť napríklad množina bodov topologického priestoru, ktorý chceme skúmať; alebo reálne čísla, prirodzené čísla, atď. Potom definujme systém S_n pre $n \in \mathbb{N}$ induktívne:

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = \mathcal{P}(S_n) \cup S_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Označme teraz $\mathbb{V}(S) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Definícia 8. Takto definované $\mathbb{V}(S)$ nazývame *superštruktúrou* s indivíduami S (alebo krátko superštruktúrou). Prvky $\mathbb{V}(S)$ nazývame *objektmi*. Pre objekt $a \in \mathbb{V}(S)$ definujeme *rang* ako najmenšie také $n \in N$, že $a \in S_n$.

Dôležité pre nás však bude to, že v rámci takejto superštruktúry môžeme realizovať všetky štandardné matematické operácie ako jej objekty. Prvé pozorovanie je, že

$$S = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots$$

teda tiež $S_i \in S_j$ ak $i < j$. Prvky rangu 0 sú zrejme práve indivíduá, prvky rangu aspoň 1 sú množiny indivíduí vo $\mathbb{V}(S)$. Ďalej ak $a \in b$ pre $b \in \mathbb{V}(S)$, tak tiež $a \in \mathbb{V}(S)$. Pokračujeme pozorovaním, že usporiadané dvojice $[x, y] = \{\{x, y\}, \{x\}\}$ objektov z $\mathbb{V}(S)$ sú tiež objekty vo $\mathbb{V}(S)$ a to rangu $r + 2$, kde r je väčší z rangov x a y. Indukciou dostaneme podobné tvrdenie pre usporiadané k-tice. Potom karteziánske súčiny objektov rangu aspoň 1 sú tiež objekty vo $\mathbb{V}(S)$. Z toho plynie, že relácie na objektoch aj funkcie (prítomné ako svoje grafy) medzi objektmi $\mathbb{V}(S)$ sú tiež objekty vo $\mathbb{V}(S)$.

Teraz by sme chceli vyrobiť neštandardné rozšírenie tejto superštruktúry. V prvom rade, určme jazyk $\mathcal{L}$, s ktorým budeme pracovať. Symboly jazyka $\mathcal{L}$ budú: Symbol $\in$, teda symbol pre množinové „patriť do“, a pre každý element $v \in \mathbb{V}(S)$ jednu konštantu c_v. (Tieto konštanty budú interpretované prirodzene ako príslušné prvky superštruktúry, preto ich v ďalšom budeme značiť len priamo ako v.) Ďalej k symbolom budú patriť prípadné špecifické symboly, ktoré sú potrebné k pohodlnému vyjadrovaniu v tej-ktorej oblasti (napríklad $+, -, \dots$). Tieto sú síce prítomné už ako konštanty (keďže napríklad graf funkcie $+ : S_0 \times S_0 \to S_0$ je element S_3, a teda máme preň jednu konštantu (nazvime ju p), ktorá reprezentuje $+$ v zmysle toho, že platí $((a, b), c) \in p$ práve vtedy, keď $a + b = c$), ale zjednodušia symboliku. Ak teraz symboly interpretujeme „prirodzene“, dostávame $\mathbb{V}(S)$ ako štruktúru jazyka $\mathcal{L}$.

V tomto momente treba trochu upraviť teóriu, ktorú sme si zatiaľ vybudovali. Totiž, v definícii formúl zmeníme bod 4. (kvantifikátory) tak, že povolíme iba „ohraničené“ kvantifikátory, tj. $(\forall x \in S_k)$ a $(\exists x \in S_k)$. Takéto formuly budeme volať ohraničené, alebo v ďalšom len formuly, pretože iným sa ani venovať nebudeme. Rozšírenie vyrobíme (tiež nie presne podľa všeobecnej teórie) tak, že vytvoríme pre každé $n \in \mathbb{N}$ množinu S_n^I/D a definujeme $*\mathbb{V}(S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^I/D$. Pritom interpretácia symbolov je presne ako v definícii redukovaného súčinu. (Vlastne spravíme pre každé $n \in \mathbb{N}$ rozšírenie $*S_n$, a tie potom zjednotíme. Zmena je len v tom, že formuly môžu „naraz zasahovať“ do viacerých „hladín“ superštruktúry.)

Ak by sme si zobrali každé S_n osobitne, tak s príslušným jazykom obmedzeným na S_n dostaneme klasickú štruktúru tohto jazyka. V tejto teda platí princíp prenosu presne tak ako sme ho dokázali. V dôkazoch v tejto práci sa vždy môžeme obmedziť na dáke S_n pre n dostatočne veľké a preto nemusíme o formulách ďalej špiritizovať. Kvôli korektnosti sa na to však pozrime.

Treba zmeniť definíciu ultramocniny tak, že budeme rozlišovať pre každý prvok akého je rangu (tj. namiesto $a \in A$ by bolo $a \in S_i$ pre vhodné $i \in \mathbb{N}$). Podobne aj v ďalších tvrdeniach. Ešte treba v takto definovanom rozšírení superštruktúry zabezpečiť platnosť princípu prenosu. Keď si však prejdeme všetko, čo viedlo k dôkazu princípu prenosu, tak k jedinej zmene dôjde v dôkaze Losovej vety, v bode 4 (indukčný krok na kvantifikátor). Tam však stačí namiesto C písať príslušné S_i a úprava je hotová.

Pozastavme sa ešte trochu pri symbole $\in$. V pôvodnej superštruktúre je interpretovaný tak, že zodpovedá množinovej štruktúre modelu. V rozšírení to už tak celkom nie je; stačí si uvedomiť, že objekty v $*\mathbb{V}(S)$ sú množiny funkcií z I do $\mathbb{V}(S)$; takže ak niečo „patrí do“ objektu v $*\mathbb{V}(S)$ (v zmysle teórie množín), tak to určite nie je objekt z $*\mathbb{V}(S)$, ale len nejaká funkcia z I do $\mathbb{V}(S)$. V $*\mathbb{V}(S)$ však máme definované predĺženie relácie $\in$ z $\mathbb{V}(S)$, a toto predĺženie sa zhoduje s pôvodnou reláciou na štandardných objektoch (teda objektoch typu $*a$ pre dáke $a \in \mathbb{V}(S)$). Dokonca aj bez Losovej vety (priamo z definície ultramocniny) sa dá nahliadnuť platnosť niektorých axióm teórie množín pre predĺženie $\in$. V praxi to znamená, že pri narábaní s rozšírením superštruktúry sa na toto predĺženie $\in$ môžeme pozerať ako na klasické množinové $\in$. Kvôli tomu nebudeme v texte rozlišovať $\in$ a jeho predĺženie $*\in$; obe budeme značiť prosto $\in$.

1.7 Ďalšie vlastnosti rozšírení reálnych čísel

Pozrime sa na reálne čísla v kontexte superštruktúr. Venujme sa priamo $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ a jej rozšíreniu. Totiž vo väčšine prípadov budeme môcť predpokladať, že superštruktúra, v ktorej budeme pracovať, bude taká, že $\mathbb{R} \subset S$, a teda tu uvedené výsledky sa budú dať aplikovať aj tam. Rozšírenie $*\mathbb{V}(\mathbb{R})$ v sebe prirodzene obsahuje $*\mathbb{R}$. Vieme, že existuje superštruktúra $\mathbb{V}(*\mathbb{R})$ a vyvstáva otázka, či náhodou nie je „izomorfná“ s $*\mathbb{V}(\mathbb{R})$. Odpoveď je nie a to dáva zmysel nasledujúcej definícii.

Definícia 9. Prvok $x \in \mathbb{V}(*\mathbb{R})$ sa volá *interný*, ak existuje také $y \in *\mathbb{V}(\mathbb{R})$, že $x \in y$. V opačnom prípade sa volá *externý*.

Zrejme všetky prvky množiny $*\mathbb{R}$ sú interné, pretože samo $*\mathbb{R}$ má rang 1. Pretože $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \in \mathbb{V}(\mathbb{R})$ (má rang 2), tak $*\mathcal{P}(\mathbb{R}) \in *\mathbb{V}(\mathbb{R})$ (je to dokonca štandardný prvok). Prvkom $\mathbb{V}(*\mathbb{R})$ je však aj množina $\mathcal{P}(*\mathbb{R})$, ktorá obsahuje všetky podmnožiny $*\mathbb{R}$. Ukážeme, že nie všetky tieto podmnožiny sú aj prvky $*\mathcal{P}(\mathbb{R})$, teda že niektoré podmnožiny $*\mathbb{R}$ sú interné a niektoré nie sú.

Zásadný rozdiel medzi internými a externými množinami je v tom, že interné sa môžu vyskytovať vo formulách, na ktoré aplikujeme princíp prenosu, kým externé nie. Presnejšie, ak máme formulu tvaru napríklad $(\forall x \in S_2)\psi$, teda kvantifikujeme cez všetky prvky rangu 2, tak princíp prenosu nám dá, že jej platnosť je ekvivalentná s platnosťou formuly $(\forall x \in *S_2)*\psi$. Teda x „nadobúda hodnoty“ len spomedzi interných množín rangu 2.

Lema 1.7.1. *Každá neprázdna interná množina $A \subset *\mathbb{N}$ (čiže prvok $*\mathcal{P}(\mathbb{N})$) má najmenší prvok vzhľadom na usporiadanie $<$.*

Dôkaz. Ide o jednoduché použitie princípu prenosu. Stačí len vlastnosť „mať najmenší prvok“ vyjadriť formulou:

$$N(x) \equiv (\exists y \in x)(\forall z \in x)(y \neq z \implies y < z).$$

Teraz vieme, že

$$\mathbb{V}(\mathbb{R}) \models (\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))N(A).$$

Princíp prenosu nám dá

$$*\mathbb{V}(\mathbb{R}) \models (\forall A \in *\mathcal{P}(\mathbb{N}))N(A),$$

a to je požadované tvrdenie. □

Lema 1.7.2 (Definovanie interných množín). *Nech $A, A_1, \ldots, A_n$ sú interné množiny alebo prvky z $*\mathbb{V}(S)$ a nech $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ je ohraničená formula jazyka $\mathcal{L}$. Potom množina*

$$\{x \in A \mid \psi(A_1, \ldots, A_n, x)\}$$

je interná.

Dôkaz. Keďže $A, A_1, \ldots, A_n$ sú interné a je ich len konečne veľa, existuje prirodzené m také, že $A, A_1, \ldots, A_m \in *S_m$. Potom zrejme vo $\mathbb{V}(S)$ platí nasledujúci princíp vymedzenia množiny:

$$\mathbb{V}(S) \models (\forall X, X_1, \ldots, X_n \in S_m)\,(\exists y \in S_{m+1})(y = \{x \in X \mid \psi(X_1, \ldots, X_n, x)\})\,,$$

kde $y = \{x \in X \mid \psi(X_1, \ldots, X_n, x)\}$ je skrátený zápis formuly

$$(\forall x \in S_m)(x \in y \iff x \in X \wedge \psi(X_1, \ldots, X_n, x)).$$

Použitím princípu prenosu a „dosadením“ za premenné $X, X_1, \ldots, X_n$ konkrétne interné množiny $A, A_1, \ldots, A_n$ dostávame požadované tvrdenie. □

Poznámka. O túto lemu sa budeme často opierať, pretože napriek jej jednoduchosti poskytuje silný nástroj pri zisťovaní, či je množina interná alebo nie. Okrem iného z nej plynie to, že konečné prieniky, zjednotenia a rozdiely interných množín sú zase interné, a podobne.

Veta 1.7.3. $\mathbb{N}$ *je externá podmnožina* $*\mathbb{N}$.

Dôkaz. Postupujme nepriamo. Keby $\mathbb{N}$ bola interná, tak je ňou aj $*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Nech teraz $x \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Teda $x > n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Z $x - 1 \in \mathbb{N}$ však plynie, že aj $(x-1)+1 = x \in \mathbb{N}$, čo ale nie je pravda. Takže aj $x - 1 \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Práve sme teda dokázali, že $*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ nemá najmenší prvok, čo je spor s lemou 1.7.1. □

Rovnakým spôsobom sa dokáže, že každá zhora ohraničená interná množina v $*\mathbb{R}$ má supremum, z čoho potom plynie, že $\mathbb{R}$ je externá podmnožina $*\mathbb{R}$.

Veta 1.7.4 (Pretečenie). *Nech* $A \subset *\mathbb{R}$ *je interná množina. Potom platí*

(i) *Ak* A *obsahuje ľubovoľne veľké kladné konečné čísla, potom obsahuje aj nekonečné číslo.*

(ii) *Ak* A *obsahuje ľubovoľne malé kladné nekonečné čísla, potom obsahuje aj konečné číslo.*

Dôkaz. Dokážme (i). Ak A je zhora neohraničená, potom je tvrdenie pravdivé. Ak je zhora ohraničená, tak množina

$$X = \{n \in *\mathbb{N} \mid n \text{ je horné ohraničenie } A\}$$

je interná podmnožina $*\mathbb{N}$. Vďaka leme 1.7.1 má najmenší prvok N. Podľa predpokladu musí byť toto N nekonečné. Potom je však aj $N - 1$ nekonečné, a nie je horným ohraničením A, teda existuje také $a \in A$, že $a > N - 1$. Tvrdenie je dokázané.

Pozrime sa na (ii). Označme Y množinu všetkých dolných ohraničení množiny A^+, kde A^+ je množina kladných prvkov A. Ak je Y zhora ohraničená nejakým konečným $n \in \mathbb{N}$, potom A^+ (čiže aj A) musí obsahovať nejaké konečné číslo. Ukážeme, že iný prípad nemôže nastať. Ak Y nie je zhora ohraničená, tak podľa 1. obsahuje nejaké nekonečné číslo, a teda A^+ (čiže ani A) nemôže obsahovať ľubovoľne malé kladné nekonečné čísla. To je spor s predpokladom. □

Dôsledok 1.7.5. *Ak interná* $A \subset *\mathbb{R}$ *obsahuje ľubovoľne veľké infinitezimálne čísla, potom obsahuje aj nejaké nie infinitezimálne. Podobne, ak* A *obsahuje ľubovoľne malé kladné nie infitezimálne čísla, potom obsahuje aj nejaké infinitezimálne číslo.*

Dôkaz. Tieto tvrdenia plynú priamo z predchádzajúcej vety pre množinu $\{x^{-1} \mid x \in A\}$. □

Napokon sa ešte definícia užitočného pojmu hyperkonečných množín. Tieto sú dôležité kvôli tomu, že vďaka princípu prenosu preberú všetky vlastnosti konečných množín, ktoré sa dajú vyjadriť formulou jazyka prvého rádu. Samozrejme, z pohľadu „zvonku“ tieto množiny konečné byť nemusia, ale vo „vnútri“ superštrukúry budú mať počet prvkov nejaké $n \in *\mathbb{N}$.

Definícia 10. Nech $\mathcal{F}_k$ je systém všetkých konečných množín v S_k. Hovoríme, že množina $A \in *\mathbb{V}(S)$ je *hyperkonečná* (alebo aj $*$-*konečná*), ak $A \in *\mathcal{F}_k$ pre dáke $k \in \mathbb{N}$.

Veta 1.7.6. *Platia nasledujúce tvrdenia:*

(i) *Ak* A *je konečná množina v* $\mathbb{V}(S)$, *potom* $*A = \{*a \mid a \in A\}$. *(Po stotožnení* $*x$ *a* x *máme vlastne* $*A = A$.*)*

(ii) *Každá konečná množina* A *v* $*\mathbb{V}(S)$ *je hyperkonečná.*

(iii) *Množina* $A \in *\mathbb{V}(S)$ *je hyperkonečná práve vtedy, ak existuje interná bijekcia* f *množiny* A *na množinu* $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ *pre nejaké* $N \in *\mathbb{N}$. *Toto* N *je jednoznačne určené. (Voláme ho interná kardinalita* A.*)*

Dôkaz. Ide o jednoduché použitie princípu prenosu. Pozrime sa najprv na (i). Zoberme si nejakú konečnú množinu $A \in S_k$ a označme si jej prvky povedzme $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$. Zrejme formula

$$(\forall x \in S_k)(x \in A \iff (x = a_1 \vee x = a_2 \vee \cdots \vee x = a_m))$$

vymedzuje množinu A. Princíp prenosu nám dá

$$* \models (\forall x \in *S_k)(x \in *A \iff (x = *a_1 \vee x = *a_2 \vee \cdots \vee x = *a_m)),$$

čo je presne tvrdenie vety.

Dokážme (iii). Ak $\psi(f, A, B)$ označíme formulu hovoriacu „f je bijekcia z A na B“, tak iste platí (pre každé k)

$$\models (\forall X \in S_k)(X \in \mathcal{F}_k \iff (\exists f \in S_{k+1})(\exists m \in \mathbb{N})\psi(f, X, \{0, 1, \ldots, m-1\})).$$

Princíp prenosu nám opäť dá

$$* \models (\forall X \in *S_k)(X \in *\mathcal{F}_k \iff (\exists f \in *S_{k+1})(\exists m \in *\mathbb{N}) * \psi(f, X, \{0, 1, \ldots, m-1\})),$$

čo je však presne to, čo chceme dokázať.

Tvrdenie (ii) plynie z (iii) a (i). Totiž ak je množina konečná, existuje bijekcia f z nej na dáku $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Toto f je konečná množina, totiž množina konečne veľa usporiadaných dvojíc. Obraz f v zobrazení $*$ leží vo $*\mathbb{V}(S)$, a vďaka jej konečnosti a (i) je to priamo f. Takže toto je interná bijekcia, ktorá nám z (iii) dá hyperkonečnosť pôvodnej množiny. □

1.8 Saturovanosť

Saturovanosť ako vlastnosť rozšírenia vyjadruje v podstate to, nakoľko „husté“ je to rozšírenie, koľko „ideálnych“ prvkov nám pribudne.

Definícia 11. Nech κ je nekonečné kardinálne číslo. Hovoríme, že neštandardné rozšírenie $*\mathbb{V}(S)$ je *κ-saturované*, ak platí nasledujúca podmienka: Nech $\mathcal{F}$ je systém interných množín z $*\mathbb{V}(S)$. Ak $\mathcal{F}$ spĺňa vlastnosť konečného prieniku a jeho kardinalita je menšia než κ, potom jeho prienik $\bigcap \mathcal{F}$ je neprázdny.

Poznámka. Samotný systém $\mathcal{F}$ nemusí byť interný; rovnako ani prienik $\bigcap \mathcal{F}$ nemusí byť interný.

Definícia 12. Hovoríme, že rozšírenie $*\mathbb{V}(S)$ je *polysaturované*, ak je κ-saturované pre dáke κ väčšie než $\mathrm{card}(\mathbb{V}(S))$. ($\mathrm{card}(X)$ značí kardinalitu množiny X.)

Poznámka. Predošlá definícia sa dá formulovať ekvivalentne takto: Rozšírenie $*\mathbb{V}(S)$ je *polysaturované*, ak platí táto nasledujúca podmienka: Nech $I \in \mathbb{V}(S)$ je indexová množina pre systém interných množín $\{F_i\}_{i \in I}$, ktorý má vlastnosť konečného prieniku. Potom $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Definícia 13. Hovoríme, že rozšírenie $*\mathbb{V}(S)$ je *HF–saturované*, ak pre každú množinu $A \in \mathbb{V}(S)$ existuje hyperkonečná množina $B \in *\mathbb{V}(S)$ taká, že $A \subset B \subset *A$.

V tomto odseku dokážeme existenciu saturovaných elementárnych rozšírení modelov. Nie vždy budeme brať priamo ultramocniny modelov podľa špeciálnych ultrafiltrov, aj keď niektoré „dobré“ vlastnosti rozšírení sa takto dosiahnuť dajú (napríklad HF–saturovanosť). Poznamenajme však, že dostatočne saturované elementárne rozšírenia sa dajú zostrojiť aj priamo ako ultramocniny podľa tzv. „α-dobrých“ ultrafiltrov, ale táto konštrukcia je komplikovanejšia. Je uvedená napríklad v knihe [6].

V tejto časti sa bude hojne vyskytovať množinovo–teoretická terminológia a aj nejaké tvrdenia z tejto oblasti. V dôkazoch budeme používať axiómu výberu.

V celej časti majme daný jazyk $\mathcal{L}$ a štruktúry považujeme za štruktúry tohto jazyka aj keď to nie je výslovne uvedené. Budeme potrebovať niekoľko nových pojmov. Nech α je nekonečné kardinálne číslo. Pre model $\mathfrak{A} = (A, J)$ jazyka $\mathcal{L}$ bude jeho *veľkosť* označovať kardinalitu $\operatorname{card}(A)$ nosiča tejto štruktúry. Veľkosť jazyka $\mathcal{L}$ bude $\max(\operatorname{card} F, \operatorname{card} R, \aleph_0)$. Túto budeme značiť $||\mathcal{L}||$. Je to vlastne kardinalita množiny formúl jazyka $\mathcal{L}$.

Pripomenieme, že v teórii modelov platí Gödelova veta o úplnosti (ktorá hovorí, že každá bezosporná teória má model). Táto veta je pomerne známa a preto nebudeme uvádzať jej dôkaz. Je uvedený napríklad v [6].

Ak η je ordinálne číslo, tak pod *elementárnym reťazcom* rozumieme reťazec štruktúr $(\mathfrak{A}_\xi)_{\xi<\eta}$ jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorý platí $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}_\mu$ pre každé $\xi < \mu < \eta$. Taktiež bez dôkazu uvedieme, že zjednotenie $\bigcup_{\xi<\eta} \mathfrak{A}_\xi$ je štruktúra jazyka $\mathcal{L}$, ktorá je elementárnym rozšírením každého člena reťazca.

Zhrnieme zopár faktov o diagramoch a rozšíreniach jazykov. Ak $Y \subset A$ je množina, tak $\mathcal{L}_Y$ bude značiť rozšírenie jazyka $\mathcal{L}$ o nové konštanty c_y pre každé $y \in Y$. Ďalej $\mathfrak{A}_Y = (\mathfrak{A}, y)_{y\in Y}$ označíme rozšírenie štruktúry $\mathfrak{A}$ do štruktúry jazyka $\mathcal{L}_Y$ také, že interpretácia konštanty c_y je prvok $y \in A$. Nosič ostáva množina A a interpretácia pôvodných symbolov jazyka $\mathcal{L}$ je rovnaká ako v $\mathfrak{A}$.

Teória modelu $\mathfrak{A}$ bude množina formúl $\operatorname{Th}(\mathfrak{A}) = \{\psi \in \operatorname{Form} \mathcal{L} \mid \mathfrak{A} \models \psi \text{ a } \psi \text{ je uzavretá}\}$.

Elementárny diagram (označíme $\Gamma_\mathfrak{A} \subset \operatorname{Form}(\mathcal{L}_A)$) štruktúry $\mathfrak{A}$ je množina

$$\Gamma_\mathfrak{A} = \{\psi \mid \psi \text{ je uzavretá formula jazyka } \mathcal{L}_A \text{ a } \mathfrak{A}_A \models \psi\} .$$

Teda $\psi \in \Gamma_\mathfrak{A}$ má tvar $\varphi(a_1, \dots, a_n)$, kde $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je formula jazyka $\mathcal{L}$; $a_1, \dots, a_n \in A$ a platí $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$. Ekvivalentne, $\Gamma_\mathfrak{A} = \operatorname{Th}(\mathfrak{A}_A)$. Nasledujúca lema, ktorá je pre nás podstatná, je vlastne prepis definície.

Lema 1.8.1. *Nech $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ sú modely jazyka $\mathcal{L}$. Potom $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ práve vtedy, keď $(\mathfrak{B}, a)_{a\in A} \models \Gamma_\mathfrak{A}$. (Pri našom označení aj $\mathfrak{B}_A \models \Gamma_\mathfrak{A}$.)*

Nech I je množina, D je filter na nej. Hovoríme, že D je *α–regulárny*, ak existuje množina $E \subset D$ kardinality $|E| = \alpha$ taká, že každé $i \in I$ patrí len do konečne veľa $e \in E$. Regulárne ultrafiltre budú v nasledujúcom dôležité, preto si musíme ujasniť či vôbec existujú.

Lema 1.8.2. *(AC) Nech I je ľubovoľná množina nekonečnej kardinality α. Potom existuje α–regulárny ultrafilter D na I.*

Dôkaz. Vďaka axióme výberu stačí dokázať tvrdenie pre jednu konkrétnu množinu kardinality α. Urobme to teda pre množinu J všetkých konečných podmnožín α.

Pre každé $\beta \in \alpha$ položme $\hat\beta = \{j \in J \mid \beta \in j\}$. Ďalej označme $E = \{\hat\beta \mid \beta \in \alpha\}$. Jasne platí $|E| = \alpha$. Každé $j \in J$ patrí len do konečne veľa $\hat\beta$, pretože $j \in \hat\beta$ znamená $\beta \in j$ a j je konečná.

Systém E má vlastnosť konečného prieniku, pretože $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \in \hat{\beta}_1 \cap \dots \cap \hat{\beta}_n$. Preto podľa vety o ultrafiltroch je možné ho rozšíriť na ultrafilter D na J. Tento je iste α–regulárny, pretože každý filter obsahujúci E je α–regulárny. □

Teraz bude nasledovať séria tvrdení, ktorá vyvrcholí vetou o existencii saturovaných elementárnych rozšírení. Hovoríme, že model $\mathfrak{A}$ je *α–univerzálny*, ak každý model $\mathfrak{B}$ veľkosti menšej než α, ktorý je elementárne ekvivalentný s $\mathfrak{A}$, možno elementárne vnoriť do $\mathfrak{A}$.

Veta 1.8.3. *(AC) Nech $||\mathcal{L}|| \le \alpha$ a D je α–regulárny ultrafilter na množine I. Potom pre každú štruktúru $\mathfrak{A}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí, že $\mathfrak{A}^I/D$ je α^+–univerzálny.*

Dôkaz. Z regularity ultrafiltra D plynie existencia množiny $E \subset D$ s vlastnosťami $|E| = \alpha$ a každé $i \in I$ patrí do konečne veľa $e \in E$. Nech teraz $\mathfrak{B} = (B, J)$ je model, pre ktorý platí $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ a $|B| \le \alpha$. Máme ukázať, že $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}^I/D$.

Nech $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ je elementárny diagram štruktúry $\mathfrak{B}$ rozšíreného jazyka $\mathcal{L}_B$, ktorý obsahuje novú konštantu pre každé $b \in B$. Podľa predchádzajúcej lemy stačí nájsť rozšírenie $(\mathfrak{A}^I/D, c_b)_{b\in B}$ ultramocniny také, že $(\mathfrak{A}^I/D, c_b)_{b\in B} \models \Gamma_{\mathfrak{B}}$.

Pretože $||\mathcal{L}|| \le \alpha$ a $|B| \le \alpha$, tak aj $||\mathcal{L}_B|| \le \alpha$. Keďže α je nekonečné a formuly sú konečné postupnosti znakov jazyka, tak iste aj $|\Gamma_{\mathfrak{B}}| \le \alpha$. Preto existuje prostá funkcia $H : \Gamma_{\mathfrak{B}} \to E$.

Teraz si všimnime $i \in I$. Existuje len konečne veľa $e \in E$ takých, že $i \in e$. Preto je len konečne veľa uzavretých formúl $\psi \in \Gamma_{\mathfrak{B}}$ takých, že $i \in H(\psi)$. (Sú to zrejme práve vzory tých $e \in E$, ktorých je konečne veľa a funkcia H je prostá.) Označme tieto formuly $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Sú to prvky $\Gamma_{\mathfrak{B}}$, teda platia v $(\mathfrak{B}, b)_{b\in B}$, čiže platí aj $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$. Označme túto formulu ψ_0. Táto má tvar $\varphi(b_1, \dots, b_k)$, kde $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ je formula jazyka $\mathcal{L}$ a platí $\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_k)$. Preto aj $\mathfrak{B} \models (\exists x_1, \dots, x_k)\varphi(x_1, \dots, x_k)$. Keďže $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, tak $\mathfrak{A} \models (\exists x_1, \dots, x_k)\varphi(x_1, \dots, x_k)$, a teda pre nejaké $a_1, \dots, a_k$ platí $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$. Takže existuje rozšírenie $(\mathfrak{A}, f_b(i))_{b\in B}$, ktoré spĺňa φ, teda $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$. Stačí totiž, aby interpretácia konštánt $f_{b_1}(i), \dots, f_{b_k}(i)$ bola po rade $a_1, \dots, a_k$ a zvyšné môžeme interpretovať ľubovoľne.

Keď toto spravíme pre každé $i \in I$, dostaneme vlastne funkciu $f_b : I \to A$ pre každé $b \in B$. Uvedomme si, že pre ne platí

$$i \in H(\psi) \quad \Longrightarrow \quad (\mathfrak{A}, f_b(i))_{b\in B} \models \psi.$$

Platí ale $H(\psi) \in E \subset D$. Takže množina tých $i \in I$, pre ktoré $(\mathfrak{A}, f_b(i))_{b\in B} \models \psi$ je z ultrafiltra. Z Losovej vety plynie

$$\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}, f_b(i))_{b\in B}/D \models \psi.$$

Pre každé $b \in B$ označme teraz $a_b = f_b^D$ (teda triedu ekvivalencie v redukovanom súčine určenú funkciou f_b). Z definície ultraproduktu potom platí

$$\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}, f_b(i))_{b\in B}/D = \big(\prod_{i\in I}\mathfrak{A}/D, a_b\big)_{b\in B}.$$

To ale znamená, že $(\prod_{i\in I}\mathfrak{A}/D, a_b)_{b\in B} \models \Gamma_{\mathfrak{B}}$, čiže aj $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}^I/D$. □

Lema 1.8.4. *(AC) Nech $||\mathcal{L}|| \le \alpha$ je jazyk, $\mathfrak{A} = (A, J)$ je jeho štruktúra, I je množina a D je α^+–regulárny ultrafilter na nej. Potom $\mathfrak{A}^I/D$ (ktoré je zrejme elementárne rozšírenie $\mathfrak{A}$) má nasledujúcu vlastnosť:*

Pre každú množinu $Y \subset A$ mohutnosti $|Y| \leq \alpha$, každá množina formúl $\Sigma(x)$ jazyka $\mathcal{L}_Y$, ktorá je konzistentná s teóriou $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_Y)$ je splnená v $(\mathfrak{A}^I/D, y)_{y\in Y}$.

Poznámka. To, že množina formúl S je konzistentná s množinou formúl T znamená, že pre každú konečnú $U \subset S$ platí, že $T \cup U$ je bezosporná.

Poznámka. $\Sigma(x)$ je množina formúl s nanajvýš jednou voľnou premennou x, a jej splnenie v nejakom modeli $\mathfrak{B}$ znamená, že existuje také $b \in B$, že $\mathfrak{B} \models \Sigma(b)$. Teda, ak v ľubovoľnej formule $\psi(x) \in \Sigma(x)$ nahradíme každý voľný výskyt x prvkom b, tak platí v $\mathfrak{B}$.

Poznámka. Táto lema sa dá dokázať aj iným spôsobom, a to práve z vety o kompaktnosti a vety o ultrafiltoch. Ten spôsob nevyužíva axiómu výberu, rovnako ako aj dôkaz nasledujúcej (poslednej) vety. To je teda cesta ako dospieť ku neštandardnej analýze bez axiómy výberu. Ako séria cvičení je tento dôkaz uvedený v [6].

Dôkaz. Pripomeňme, že existuje prirodzené elementárne vnorenie $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^I/D$ (značili sme ho aj $*$). Bežná prax pri ultramocninách je stotožnenie prvkov $a \in A$ a $h(a)$; teda sa na situáciu dá pozerať tak, že platí $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^I/D$.

Nech teda $Y \subset A$, $|Y| < \alpha^+$. Potom platí (z podobných dôvodov ako v predošlom dôkaze) $||\mathcal{L}_Y|| \leq \alpha$. Z predošlej vety máme, že ultramocnina $\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}, y)_{y\in Y}/D$ je α^+–univerzálna. Ale z definície ultramocniny

$$\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}, y)_{y\in Y}/D = \big(\prod_{i\in I} A/D, h(y)\big)_{y\in Y},$$

čo pri stotožnení y a $h(y)$ môžeme chápať ako $(\mathfrak{A}^I/D, y)_{y\in Y}$. Táto štruktúra je teda α^+–univerzálna.

Každá množina formúl $\Sigma(x)$ konzistentná s teóriou $(\mathfrak{A}, y)_{y\in Y}$ je splnená v nejakom modeli $(\mathfrak{C}, c_y)_{y\in Y} \equiv (\mathfrak{A}, y)_{y\in Y}$ veľkosti nanajvýš α. Totiž $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \Sigma(x)$ je bezosporná, teda podľa Gödelovej vety o úplnosti má model. Keďže $||L_Y|| \leq \alpha$, konštrukcia modelu v dôkaze tejto vety nám dá model kardinality menšej alebo rovnej α.

Potom však z univerzálnosti plynie, že $(\mathfrak{C}, c_y)_{y\in Y} \prec (\mathfrak{A}^I/D, y)_{y\in Y}$, teda $\Sigma(x)$ je splnená v $(\mathfrak{A}^I/D, y)_{y\in Y}$. □

V nasledujúcej vete sa už hovorí o saturovaných modeloch. V teórii modelov je však bežná trochu iná (všeobecnejšia) definícia saturovanosti, akú sme uviedli na začiatku sekcie. Preto ju vyslovíme, vetu dokážeme a potom ukážeme, ako z nej plynie tá definícia, ktorá je bežná v neštandardnej analýze. V ďalšom budeme vždy používať druhú menovanú a „modeloteoretickú“ použijeme len teraz.

Nech α je kardinálne číslo. Model $\mathfrak{A} = (A, J)$ je *α–saturovaný*, ak pre každú množinu $X \subset A$ kardinality $|X| < \alpha$ platí, že v rozšírení $\mathfrak{A}_X$ je splnená každá množina formúl $\Sigma(x)$ jazyka $\mathcal{L}_X$ konzistentná s teóriou $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_X)$.

Veta 1.8.5. *Predpokladajme, že $||\mathcal{L}|| \leq \alpha$. Potom pre každý model $\mathfrak{A}$ jazyka $\mathcal{L}$ existuje jeho α^+–saturované elementárne rozšírenie.*

Dôkaz. V tu prezentovanom dôkaze už nestačí vziať vhodnú ultramocninu modelu $\mathfrak{A}$, ale budeme musieť použiť niečo iné. (V skutočnosti sa dajú saturované rozšírenia zostrojiť priamo ako ultraprodukty pre vhodnom výbere ultrafiltrov (tzv. α–dobré). Táto konštrukcia je uvedená napríklad v [6].)

Zostrojíme elementárny reťazec $\mathfrak{B}_\xi$, $\xi < 2^\alpha$ taký, že

1. každé $\mathfrak{B}_\xi$ je elementárne rozšírenie $\mathfrak{A}$,
2. pre každé $X \subset B_\xi$ kardinality $|X| \leq \alpha$ platí, že v $(\mathfrak{B}_{\xi+1}, a)_{a\in X}$ je splnená každá množina formúl $\Sigma(x)$ konzistentná s teóriou $(\mathfrak{B}_\xi, a)_{a\in X}$.

Zoberme nejakú množinu I a α^+–regulárny ultrafilter D na nej. Reťazec definujeme transfinitnou indukciou takto: Položíme $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}^I/D$. Ak μ je limitné ordinálne číslo, tak položíme $\mathfrak{B}_\mu = \bigcup_{\xi<\mu} \mathfrak{B}_\xi$. Ak $\mu = \xi + 1$, tak definujeme $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{B}_\xi^I/D$. Vďaka predošlej leme takto daný reťazec má požadované vlastnosti.

Položme teraz $\mathfrak{B} = \bigcup_{\xi<2^\alpha} \mathfrak{B}_\xi$. Platí $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}$, teda stačí už len dokázať, že $\mathfrak{B}$ je saturované. Zoberme teda $X \subset B$ kardinality $|B| \leq \alpha$ a nech $\Sigma(x)$ je množina formúl jazyka $\mathcal{L}_X$ konzistentná s teóriou $(\mathfrak{B}, a)_{a\in X}$.

Pretože 2^α má kofinalitu väčšiu než α, existuje také $\xi < 2^\alpha$, že $X \subset B_\xi$. Teraz $\mathfrak{B}_\xi$ je elementárna podštruktúra $\mathfrak{B}$, teda $\Sigma(x)$ je tiež konzistentná s teóriou $(\mathfrak{B}_\xi, a)_{a\in X}$. Z našej konštrukcie ale plynie, že $\Sigma(x)$ je splnená v $(\mathfrak{B}_{\xi+1}, a)_{a\in X}$, teda existuje také $b \in B_{\xi+1}$, že $(\mathfrak{B}_{\xi+1}, a)_{a\in X} \vDash \Sigma(b)$. Pretože však $\mathfrak{B}_{\xi+1} \prec \mathfrak{B}$, tak aj $(\mathfrak{B}, a)_{a\in X} \vDash \Sigma(b)$. To je to, čo sme chceli dokázať. □

Teraz sa pozrime na to, ako z posledne uvedenej definície saturovanosti plynie skôr uvedená. Nech teda rozšírenie $*\mathbb{V}(S)$ je κ–saturované podľa neskoršej definície. Majme teraz daný systém $\mathcal{F}$ interných množín z $*\mathbb{V}(S)$ kardinality $|\mathcal{F}| < \kappa$ a ktorý spĺňa vlastnosť konečného prieniku. Za týchto predpokladov treba dokázať, že $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Každé $v \in \mathcal{F}$ je interná, teda existuje $y \in *\mathbb{V}(S)$ také, že $v \in y$. Ale $y \in *\mathbb{V}(S)$ znamená, že $y \in *S_k$ pre dáke $k \in \mathbb{N}$. Potom však $v \in *S_{k+1}$, teda je to tiež prvok rozšírenej superštruktúry. Uvažujme teraz rozšírenie jazyka $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ zavedeného pri superštruktúrach a rozšírenie $(*\mathbb{V}(S), v)_{v\in\mathcal{F}}$.

Všimnime si teraz množinu formúl $\Sigma(x)$ v jazyku $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ takúto: Pre každé $v \in \mathcal{F}$ bude v $\Sigma(x)$ formula $(v \in x)$. Takáto množina formúl je konzistentná s teóriou $(*\mathbb{V}(S), v)_{v\in\mathcal{F}}$, pretože $\mathcal{F}$ má vlastnosť konečného prieniku, čiže každá konečná podmnožina formúl zo $\Sigma(x)$ je splnená.

Z druhej definície saturovanosti teraz plynie, že $\Sigma(x)$ je splnená v $(*\mathbb{V}(S), v)_{v\in\mathcal{F}}$, teda existuje také $y \in *\mathbb{V}(S)$, že $(*\mathbb{V}(S), v)_{v\in\mathcal{F}} \vDash \Sigma(y)$. To ale znamená, že $y \in \bigcap \mathcal{F}$. Dôkaz je hotový.

1.8.1 Niektoré dôsledky saturovanosti

Veta 1.8.6. *Každá superštruktúra $\mathbb{V}(S)$ má neštardandné rozšírenie $*\mathbb{V}(S)$, ktoré je HF–saturované.*

Podáme dva dôkazy. Jeden z nich je veľmi jednoduchý — je to priama aplikácia saturovanosti. Jeho nevýhodou je však to, že sa v tejto práci pri saturovanosti opierame o axiómu výberu. Druhý z nich je trošku zložitejší, avšak ukazuje, že HF-saturované rozšírenie sa dá zostrojiť priamo ako ultramocnina, ak sa vhodne postaráme o ultrafilter a indexovú množinu. Nepotrebuje axiómu výberu. Ak však potrebujeme v aplikáciách použiť aj iné vlastnosti rozšírenia ako to, že je HF–saturované (napríklad saturovanosť), tak nám tento dôkaz zjavne nepostačí.

Dôkaz prvý — saturovanosť. Nech teda $*\mathbb{V}(S)$ je polysaturované rozšírenie. Ukážeme, že je HF–saturované. Zoberme si množinu $A \in \mathbb{V}(S)$. Pre každé $a \in A$ definujme množinu $\mathcal{G}_a = \{B \subset *A \mid a \in B \text{ a } B \text{ je hyperkonečná}\}$. Táto množina je zrejme interná v $*\mathbb{V}(S)$, pretože vlastnosť „byť hyperkonečná“ sa dá definovať formulou (ako plynie z jednej z liem v predošlom odseku)

$$(\exists N \in *\mathbb{N})(\exists f : \{1, 2, \dots, N\} \to B)(f \text{ je bijekcia}),$$

pričom samozrejme aj „f je bijekcia“ je zapísateľné formulou (ak označíme $K = \{1, 2, \dots, N\}$)

$$(\forall x, y \in K)(f(x) = f(y) \implies x = y) \wedge (\forall x \in B)(\exists y \in K)(f(y) = x).$$

Uvažujme teraz systém $\{\mathcal{G}_a\}_{a\in A}$. Je to systém interných množín v $*\mathbb{V}(S)$ kardinality nanajvýš $\mathrm{card}(\mathbb{V}(S))$. Vidno, že má vlastnosť konečného prieniku (množina $\{a_1, \dots, a_n\}$ leží v prieniku $\mathcal{G}_{a_1} \cap \dots \cap \mathcal{G}_{a_n}$). Preto z polysaturovanosti plynie, že prienik $\bigcap_{a\in A} \mathcal{G}_a$ je neprázdny. Hocaký prvok C z tohto prieniku spĺňa $A \subset C \subset *A$ a navyše je hyperkonečný. Teda splnili sme podmienku z definície HF–saturovanosti. □

Dôkaz druhý — ultramocnina. Nech indexová množina I je množina všetkých neprázdnych konečných množín vo $\mathbb{V}(S)$. Nech D je ultrafilter na I generovaný nasledovným systémom: pre každé $a \in \mathbb{V}(S)$ je v ňom množina

$$\{j \in J \mid j \text{ je konečná množina prvkov z } \mathbb{V}(S) \text{ a } a \in j\}.$$

Takýto systém má zjavne vlastnosť konečného prieniku (pretože ak si vezmeme množiny zodpovedajúce prvkom $a_1, \dots, a_n$, tak v ich prieniku leží aspoň množina $\{a_1, \dots, a_n\}$. Z vety o ultrafiltroch teda plynie existencia požadovaného ultrafiltra. Skonštruujme teraz rozšírenie $\mathbb{V}(S)$ ako v odseku o superštruktúrach s indexovou množinou I podľa ultrafiltra D. Ukážeme, že takto získané $*\mathbb{V}(S)$ je HF–saturované.

Zvoľme pevne $a \in \mathbb{V}(S)$. Pre každé $j \in I$ položme $F(j) = a \cap j$. Zobrazenie F je teda definované na I s hodnotami vo $\mathbb{V}(S)$. Presnejšie, keďže a je prvkom superštruktúry, má nejaký rang (povedzme k), z čoho plynie, že aj $F(j)$ má rang nanajvýš k, teda $F(j) \in S_k$ pre všetky j. Inak povedané, $F \in S_k^I$, teda reprezentuje nejakú triedu ekvivalencie v $S_k^I/D = *S_k$. Označme tento prvok $b = [F]^D \in *S_k \subset *\mathbb{V}(S)$.

Pretože každé $F(j)$ je konečná podmnožina a, tak b je hyperkonečná podmnožina $*a$. Uvedomme si, že na tento krok nepotrebujeme Losovu vetu. Totiž pre objekt z $*\mathbb{V}(S)$ vlastnosť „byť hyperkonečný“ znamená patriť do nejakej $*\mathcal{F}_k$, kde $\mathcal{F}_k$ je systém všetkých konečných množín v S_k. To je však z definície predĺženia relácie $\in$ to isté, ako tvrdenie: množina indexov, na ktorej príslušná zložka patrí do $\mathcal{F}_k$, je z ultrafiltra. V našom prípade je to však celé I, ktoré je iste v každom ultrafiltri.

Ostáva už len ukázať, že $a \subset b$. Nech teda $c \in a$. c je v $*\mathbb{V}(S)$ reprezentované triedou ekvivalencie konštantnej funkcie $\bar{c}$. Ak teraz ukážeme, že $\{j \in J \mid c \in F(j)\} \in D$, tak sme hotoví, pretože to znamená $*c = [\bar{c}]^D \in [F]^D = b$. (Ani na tento krok nepotrebujeme Losovu vetu. Plynie totiž priamo z definície predĺženia relácie $\in$.) Lenže $\{j \in J \mid c \in F(j)\} = \{j \in J \mid c \in j\}$ a tá je vo filtri, pretože sme ho skonštruovali tak, aby obsahoval práve tieto množiny. □

Veta 1.8.7. *Nech E je vektorový priestor. Označme $\mathcal{F}_E$ triedu všetkých jeho konečnorozmerných podpriestorov, zobrazenie* $\dim : \mathcal{F}_E \to \mathbb{N}$ *priradí každému $F \in \mathcal{F}_E$ jeho dimenziu. Potom existuje také $F \in *\mathcal{F}_E$, že platí $E \subset F \subset *E$ a* $\dim(F) \in *\mathbb{N}$ *(teda F je $*$-konečnorozmerný).*

Táto veta je veľmi podobná predošlej, a to nie len v znení, ale aj v dôkaze. Takisto sa dá dokázať ako priamy dôsledok saturovanosti, alebo (ak ju formulujeme tak, že „existuje rozšírenie, ktoré spĺňa. . . “) žiadané rozšírenie zostrojíme priamo ako vhodnú ultramocninu.

Dôkazy neuvedieme v plnom znení, pretože sú skutočne identické s predošlými, stačí namiesto „konečná množina“ písať „konečnorozmerný vektorový priestor“.

Veta 1.8.8 (Predlžovanie postupností). *Nech $\mathbb{V}(S)$ je superštruktúra s $\mathbb{N} \subset S$ a $*\mathbb{V}(S)$ je jej ω_1-saturované rozšírenie. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme danú internú množinu $A_n \in *\mathbb{V}(S)$. Potom postupnosť $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ môžme predĺžiť na internú postupnosť $(A_n)_{n\in *\mathbb{N}} \subset *\mathbb{V}(S)$.*

Poznámka. Vo vete je predpoklad ω_1-saturovanosti (kde ω_1 je najmenší nespočítateľný kardinál). V skutočnosti každé rozšírenie — ultramocnina je takto saturované. Dôkaz tohto tvrdenia sme však nepodali, preto sme aj ponechali tento predpoklad vo formulácii vety.

Dôkaz. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu F_n tých interných postupností $(B_k)_{k\in *\mathbb{N}}$, pre ktoré $B_n = A_n$. Takáto postupnosť jestvuje aspoň jedna, napríklad konštantná postupnosť $(A_n)_{k\in *\mathbb{N}}$ spĺňa podmienku.

Systém $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má vlastnosť konečného prieniku. Opäť v prieniku $F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_m}$ leží postupnosť definovaná $B_{n_i} = A_{n_i}$ pre $i = 1, \ldots, m$ a $B_i = A_1$ pre $i \notin \{n_1, \ldots, n_m\}$. Z ω_1-saturovanosti teda plynie, že prienik $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je neprázdny. Postupnosť v ňom ležiaca má požadované vlastnosti. $\square$

1.9 Vlastnosti rozšírení metrických a topologických priestorov

Majme daný topologický priestor $(X, \mathcal{T})$. Pre každé $x \in X$ nech $\mathcal{T}_x$ značí systém všetkých otvorených množín obsahujúcich x. V celom odseku budeme pracovať so superštruktúrou $\mathbb{V}(S)$, kde S bude zahŕňať ako príslušný priestor, tak aj reálne čísla.

Definícia 14. *Monádou* prvku $x \in X$ nazveme množinu

$$\mu(x) = \operatorname{mon}(x) = \bigcap_{O\in\mathcal{T}_x} *O.$$

Prvok $y \in *X$ budeme volať *skoroštandardný*, ak existuje také $x \in X$, že $y \in \mu(x)$. Pre $x, y \in *X$ budeme písať $x \approx y$, ak x a y budú v rovnakej monáde, teda ak existuje $z \in X$ také, že platí $x, y \in \mu(z)$.

V reálnych číslach, kde je $\mathcal{T}_x$ generovaná intervalmi typu $(x-\epsilon, x+\epsilon)$, je zrejme monáda $\mu(0)$ tvorená práve nekonečne malými číslami. Ďalej $\mu(x) = \{x + \delta \mid \delta \in \mu(0)\}$.

Aby sme mohli neštandardne charakterizovať otvorené množiny vo všeobecnosti potrebujeme nasledujúcu lemu.

Lema 1.9.1 (Aproximačná lema). *Pre každý bod x topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$ existuje interná množina $D \in *\mathcal{T}_x$ taká, že $D \subset \mu(x)$.*

Dôkaz. Na úvod si uvedomíme, že $\mu(x)$ v netriviálnom prípade nie je interná množina. Vidno to napríklad v reálnych číslach — keby $\mu(0)$ bola interná, tak podľa dôsledku 1.7.5 obsahuje aj nejaké nie nekonečne malé číslo, čo je spor.

Na dôkaz tejto lemy budeme potrebovať dostatočnú saturovanosť rozšírenia. Predpokladajme teda, že rozšírenie je κ-saturované, kde $\kappa > \operatorname{card}(\mathcal{T}_x)$. Neskôr uvidíme, že miesto $\mathcal{T}_x$ stačí brať bázu filtra $\mathcal{T}_x$.

Definujme pre každé $A \in \mathcal{T}_x$ množinu $F_A = \{E \in *\mathcal{T}_x \mid E \subset *A\}$. Vidno, že každé F_A je interná množina a navyše systém $\{F_A \mid A \in \mathcal{T}_x\}$ má vlastnosť konečného prieniku. Zo saturovanosti teda plynie, že existuje $D \in *\mathcal{T}_x$, ktoré leží v prieniku všetkých F_A pre $A \in \mathcal{T}_x$. Teda $D \subset *A$ pre každé $A \in \mathcal{T}_x$. Z toho plynie $D \subset \mu(x)$. Množina D je evidentne interná, lebo je to prvok $*\mathcal{T}_x$. Tým je dôkaz hotový. □

Veta 1.9.2. *V topologickom priestore $(X, \mathcal{T})$ platí:*

(i) X je Hausdorffovský práve vtedy, keď $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$ pre každé $x, y \in X$ také, že $x \neq y$.

(ii) Množina $A \subset X$ je otvorená práve vtedy, keď $\mu(x) \subset *A$ pre každé $x \in A$.

(iii) Množina $A \subset X$ je uzavretá práve vtedy, keď pre každé $x \in X$ a $y \in A$ platí $y \in \mu(x) \implies x \in A$.

(iv) Množina $A \subset X$ je kompaktná práve vtedy, keď pre každé $y \in *A$ existuje $x \in A$ také, že $y \in \mu(x)$. Inak povedané, každý bod $*A$ je skoroštandardný a A je uzavretá.

Dôkaz. Začnime (ii). Implikácia $\implies$ je jasná, pretože z otvorenosti A plynie existencia štandardnej otvorenej množiny $E \in \mathcal{T}_x$ takej, že $E \subset A$. Potom $\mu(x) \subset E \subset A$. Opačná implikácia sa musí oprieť o predchádzajúcu lemu. Totiž vďaka nej platí

$$*\mathbb{V}(S) \vDash (\exists D \in *\mathcal{T}_x)(D \subset *A).$$

Princíp prenosu nám dá

$$\mathbb{V}(S) \vDash (\exists D \in \mathcal{T}_x)(D \subset A)$$

pre každé $x \in A$, čo je však definícia otvorenosti A.

Tvrdenie (iii) plynie z (ii) a z faktu, že uzavreté množiny sú doplnky otvorených.

Implikácia $\implies$ časti (i) je jasná z definícií a na opačnú použijeme predchádzajúcu lemu. Z nej plynie, že existujú interné $D_x \in *\mathcal{T}_x, D_y \in *\mathcal{T}_y$ také, že $D_x \subset \mu(x)$ a $D_y \subset \mu(y)$. Potom $D_x \cap D_y = \emptyset$, teda platí

$$*\mathbb{V}(S) \vDash (\exists D_x \in *\mathcal{T}_x, D_y \in *\mathcal{T}_y)(D_x \cap D_y = \emptyset).$$

Aplikovaním princípu prenosu máme

$$\mathbb{V}(S) \vDash (\exists D_x \in \mathcal{T}_x, D_y \in \mathcal{T}_y)(D_x \cap D_y = \emptyset),$$

čo je definícia hausdorffovosti priestoru.

Ostáva časť (iv). Najprv implikácia „$\implies$“. Nech A je kompaktná, ale existuje $y \in *A$, ktoré nie je skoroštandardné. Z časti (ii) a princípu prenosu plynie, že každé $x \in A$ je obsiahnuté v dákej otvorenej $D_x \in \mathcal{T}_x$ takej, že $y \notin *\mathcal{T}_x$. Systém $\{D_x \mid x \in A\}$ tvorí otvorené pokrytie A, a teda existuje konečné podpokrytie $\{D_1, \ldots, D_n\}$. Pretože $A \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$, z princípu prenosu plynie $*A \subset \bigcup_{i=1}^n *D_i$. Pretože však $y \notin *D_i$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$, tak $y \notin *A$. To je spor.

Pozrime sa na implikáciu „$\impliedby$“. Nech platí podmienka zo znenia vety, ale A nie je kompaktná, teda existuje otvorené pokrytie $\mathcal{G}$, ktoré nemá konečné podpokrytie. Definujme systém

$$F = \{*Y \subset *A \mid A - Y \in \mathcal{G}\},$$

ktorého prvky sú zrejme interné množiny. Overme, že má vlastnosť konečného prieniku. Nech $*Y_1, \ldots, *Y_n \in F$, potom platí $A - (Y_1 \cap \cdots \cap Y_n) = (A - Y_1) \cup \cdots \cup (A - Y_n)$. Pretože však žiaden konečný podsystém $\mathcal{G}$ nepokrýva A, tak ani $(A-Y_1)\cup\cdots\cup(A-Y_n)$ nepokrýva celé A. To ale znamená, že $Y_1\cap\cdots\cap Y_n$ je neprázdny. Z princípu prenosu plynie aj $*Y_1\cap\cdots\cap *Y_n \neq \emptyset$.

Podobne ako v aproximačnej leme využijeme κ-saturovanosť pre dáke $\kappa > \mathrm{card}(\mathcal{T}_x) \geq \mathrm{card}(F)$. Z nej totiž plynie, že existuje $y \in *A$, ktoré je vo všetkých $*Y \in F$. Podmienka vo vete tvrdí, že potom existuje $x \approx y$ také, že $x \in A$. Lenže $\mathcal{G}$ pokrýva A, teda existuje otvorená $H \in \mathcal{G}$ taká, že $x \in H$. Z časti (ii) však plynie, že $\mu(x) \subset *H$, teda aj $y \in *H$. Zároveň však platí, že $y \in *X = *A - *H \in F$, čiže $y \notin *H$. To je spor. Dôkaz je hotový. □

Definícia 15. Ak je prvok $y \in *X$ skoroštandardný v Hausdorffovskom priestore X, tak je dobre definovaná jeho *štandardná časť* (značíme $\mathrm{st}(y)$ alebo $^\circ y$). Máme teda zobrazenie, ktoré každému skoroštandardnému prvku y priradí to $x \in X$, pre ktoré $y \in \mu(x)$. Toto zobrazenie budeme tiež nazývať štandardná časť.

Veta 1.9.3. *Nech $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory a $f : X \to Y$ je zobrazenie. Potom f je spojité v $x \in X$ práve vtedy, keď pre každé $y \approx x$ platí $*f(y) \approx *f(x) = f(x)$. Preto f je spojité na X práve vtedy, keď pre každé $x \in X$ a $y \in *X$ máme $y \approx x \implies *f(y) \approx *f(x)$.*

Poznámka. Konvencia bežne používaná v literatúre je, že pri funkciách nedodržiava „hviezdičkovanie“, teda píše sa namiesto $*f$ iba f. Aj my sme sa s týmto už stretli, napríklad ku bežným operáciám a reláciám ako $+$ a $<$ nepridávame hviezdičku. V tomto kontexte by podmienka z vety znela $y \approx x \implies f(y) \approx f(x)$.

Dôkaz. Najprv implikácia „$\Longrightarrow$“. Keďže f je spojitá v x, vieme, že pre každé otvorené okolie V bodu $f(x)$ v Y existuje okolie U bodu $x \in X$ také, že platí

$$\models f(U) \subset V.$$

Princíp prenosu zabezpečí platnosť $* \models *f(*U) \subset *V$. Keďže U je otvorená a $x \in U$, $\mu(x) \subset *U$, teda $y \approx x$ implikuje $y \in *U$, čiže $*f(y) \in *V$.

To ale znamená, že z $y \approx x$ plynie, že $*f(y) \in *V$ pre ľubovoľné okolie V bodu $*f(x) = f(x)$, teda $*f(y) \in \mu(f(x))$. Inak povedané, $*f(y) \approx *f(x)$.

Teraz opačná implikácia, teda „$\Longleftarrow$“. Dokážeme spojitosť f v x z definície. Nech V je otvorené okolie bodu $f(x)$ v Y. Podmienka vo vete vlastne znamená $*f(\mu(x)) \subset \mu(*f(x))$. Z aproximačnej lemy máme interné $D \subset \mu(x)$, ktoré spĺňa $D \in *(\mathcal{T}_X)_x$. Teda platí $*f(D) \subset \mu(*f(x)) \subset *V$ vďaka otvorenosti V. Platí teda

$$* \models (\exists U \in *(\mathcal{T}_X)_x)\,(*f(U) \subset *V).$$

Princíp prenosu, tentokrát „naspäť“, zabezpečí

$$\models (\exists U \in (\mathcal{T}_X)_x)\,(f(U) \subset V),$$

teda to čo treba na spojitosť f. □

Na záver tohto odseku podáme neštandardnú charakterizáciu súčinovej topológie. Pripomeňme, že ak $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ je systém topologických priestorov indexovaný cez množinu I, tak súčinová topológia na množine $X = \prod_{i\in I} X_i$ je daná subbázou $\{p_i^{-1}(U_i) \mid i \in I, U_i \in \mathcal{T}_i\}$, kde $p_i : X \to X_i$ sú prirodzené projekcie. Teda bázu tvoria množiny typu $\prod_{i\in I} Y_i$, kde pre nejakú konečnú $J \subset I$ platí $Y_i \in \mathcal{T}_i$ pre $i \in J$ a $Y_i = X_i$ pre $i \in I - J$.

Veta 1.9.4. *Nech* $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *je systém topologických priestorov indexovaný cez neprázdnu množinu* I. *Uvažujme ich súčin* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *vybavený súčinovou topológiou. Nech* $f \in X$ *a* $g \in *X$. *Potom* $*f \approx g$ *práve vtedy, keď* $g(i) \approx f(i)$ *pre každé* $i \in I$.

Dôkaz. Smer „$\Longrightarrow$“ dokážeme sporom. Nech teda $*f \approx g$, ale existuje $j \in I$ také, že $f(j) \not\approx g(j)$. Potom však existuje také $G \in \mathcal{T}_j$, že $f(j) \in G$ a $g(j) \notin *G$. Označme $W = \{h \in X \mid h(j) \in G\}$. Táto množina je iste otvorená (dokonca jedna z množín tvoriaca subbázu X). Ďalej platí

$$\models (\forall t \in X)\,(t \in W \implies t(j) \in G)$$

a z princípu prenosu aj

$$* \models (\forall t \in *X)\,(t \in *W \implies t(j) \in *G).$$

Preto $g \notin *W$. Na druhej strane, $f \in W$ a otvorenosť W implikuje $g \in \mu(f) \subset *W$, čo je spor.

Na dôkaz opačnej implikácie vezmime ľubovoľné G z bázy topológie na X s vlastnosťou $f \in G$. Ukážeme, že $g \in *G$, z čoho vyplynie $g \in \mu(f)$. Uvedomme si, že $G = \prod_{i\in I} Y_i$, kde existuje konečná $J \subset I$ taká, že pre $i \in I - J$ je $Y_i = X_i$ a pre zvyšné i sú Y_i otvorené v X_i. Preto vlastne „$h \in G$“ znamená

$$(h \in X) \wedge (\forall i \in J)\,(h(i) \in Y_i).$$

Vďaka konečnosti J a princípu prenosu vieme, že $h \in *G$ znamená

$$(h \in *X) \wedge (\forall i \in *J = J)\,(h(i) \in *Y_i).$$

Z otvorenosti Y_i a predpokladu vety preto dostávame $g \in *G$. $\square$

Predošlá veta spolu s 1.9.2 nám dáva priamočiary dôsledok.

Dôsledok 1.9.5 (Tichonovova veta). *Súčin topologických priestorov je kompaktný práve vtedy, keď každý činiteľ je kompaktný.*

Dôkaz. Označme si priestory rovnako ako v predošlej vete. Jeden smer plynie triviálne zo spojitosti projekcií. Na dôkaz druhého smeru použijeme vetu 1.9.2 a dokážeme, že každé $g \in *X$ je skoroštandardné, teda že existuje $f \in X$ s $f \approx g$. Ale pre každé $i \in I$ je $g(i) \in *X_i$ skoroštandardné, pretože X_i je kompaktné z predpokladu. Teda existuje $f(i) \in X_i$ s $f(i) \approx g(i)$. Z predošlej vety napokon vyplýva, že takto po zložkách zostrojené $f \in X$ má vlastnosť $f \approx g$. $\square$

Poznámka. V prípade, že každé X_i je Hausdorffov priestor, nemusíme explicitne použiť axiómu výberu pri zostrojovaní prvku f (pretože pre každé $i \in I$ existuje jediné $f(i)$ s vlastnosťou $g(i) \in \mu(f(i))$.). V opačnom prípade v tomto dôkaze použijeme axiómu výberu priamo.

Nech (M, ρ) je metrický priestor. Topológia na ňom je generovaná otvorenými guľami $B(x, r) = \{y \in M \mid \rho(x, y) < r\}$. V tomto prípade teda $\mu(x) = \bigcap_{r\in\mathbb{R}, r>0} B(x, r)$.

1.10 Topologické grupy

V tomto odseku zhrnieme zopár faktov o grupách, ktoré použijeme v nasledujúcej kapitole.

Definícia 16. *Topologickou* grupou rozumieme grupu $(G,\cdot)$ vybavenú topológiou $\mathcal{T}$, ak grupové operácie sú v tejto topológii spojité, teda:

- zobrazenie $\cdot : G \times G \to G$ dané $(x,y) \mapsto x \cdot y$ je spojité,
- zobrazenie $^{-1} : G \to G$ dané $x \mapsto x^{-1}$ je spojité.

Metriku ρ na grupe $(G,\cdot)$ nazývame *(zľava) invariantná* vzhľadom k operácii na grupe, ak platí pre každé $a,x,y \in G$ platí $\rho(x,y) = \rho(a \cdot x, a \cdot y)$,

Zrejme metrika na grupe dá vzniknúť topológii (generovanej otvorenými guľami) na grupe. Invariantnosť metriky nám zaručí, že takto vzniknutá topológia bude kompatibilná s grupovou operáciou.

Definícia 17. Nech X je množina a $\mathcal{U}$ je systém podmnožín $X{\times}X$. $\mathcal{U}$ sa nazýva *uniformita* na X, ak platí

1. pre každé $U \in \mathcal{U}$ platí, že $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset U$,
2. pre každé $U \in \mathcal{U}$ aj $U^{-1} \in \mathcal{U}$,
3. $\mathcal{U}$ je filter,
4. pre každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ také, že $V \circ V \subset U$.

Podsystém $\mathcal{W}$ uniformity $\mathcal{U}$ na X sa volá *báza uniformity*, ak pre každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $W \in \mathcal{W}$ tak, že $W \subset U$.
Zobrazenie $f : X \to Y$, kde $\mathcal{U},\mathcal{V}$ sú uniformity na X,Y je *rovnomerne spojité*, ak pre každé $V \in \mathcal{V}$ je $(f{\times}f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. (Ekvivalentne, stačí namiesto každého $V \in \mathcal{V}$ brať iba V z nejakej bázy $\mathcal{V}$.)

Uniformita $\mathcal{U}$ prirodzene generuju topológiu na X, totiž báza okolí bodu $x \in X$ bude systém $\{V_x \mid V \in \mathcal{W}\}$, kde $\mathcal{W}$ je báza uniformity a $V_x = \{y \in X \mid (x,y) \in V\}$.

Hovoríme, že priestor s uniformitou je hausdorffovský, ak topológia generovaná danou uniformitou má Hausdorffovu vlastnosť. (Ekvivalentne, ak $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = \{(x,x) \mid x \in X\}$.)

Uniformity sú užitočné, ak chceme skúmať rovnomerne spojité zobrazenia topologických priestorov. Totiž pre metrické priestory nám táto definícia dá presne to, čo by sme čakali; totiž rovnomernú spojitosť ako ju poznáme. Ak máme na X metriku d, tak systém $\mathcal{U}_d = \{U \subset X{\times}X \mid \exists \epsilon > 0 : \{(x,y) \in X{\times}X \mid d(x,y) < \epsilon\} \subset U\}$ je uniformita na X. Jej báza je napríklad systém množín typu $\{(x,y) \in X{\times}X \mid d(x,y) < \epsilon\}$ pre $\epsilon > 0$.

Na topologických grupách nám grupová štruktúra dá automaticky vzniknúť dvom uniformitám (ľavej a pravej). Nech $(G,\cdot)$ je topologická grupa s topológiou $\mathcal{T}$. Nech $\mathcal{O}(e)$ je systém všetkých okolí jednotkového prvku $e \in G$. Potom

$$\mathcal{U} = \{U \subset G{\times}G \mid \exists W \in \mathcal{O}_e : \{(a,b) \in G{\times}G \mid a \cdot b^{-1} \in W\} \subset U\}$$

je uniformita na G. Tá druhá je definovaná podobne, len podmienka v predošlej formulke je $a^{-1} \cdot b \in W$.

Ďalej platí, že každý spojitý homomorfizmus z topologickej grupy je automaticky rovnomerne spojitý.

1.11 Priestory s mierou

Definícia 18. Nech X je množina a $\mathcal{F}$ je systém jej podmnožín. Hovoríme, že $\mathcal{F}$ je *(σ-)algebra* na X, ak je uzavretý na (spočítateľné) konečné zjednotenia, doplnky v X a $\emptyset \in \mathcal{F}$.
Nezáporná funkcia $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, sa nazýva *konečne aditívna miera* na $\mathcal{F}$ (alebo k. a. $\mathcal{F}$-miera na X), ak pre každú dvojicu $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$ platí $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Ak platí navyše $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ pre každý systém $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ po dvoch disjunktných množín, tak μ voláme *miera*. Miere povolíme nadobúdať „hodnotu“ $+\infty$ (v bežnom zmysle). Miera μ sa nazýva *konečná*, ak $\mu(X) \in \mathbb{R}$.
Trojici $(X, \mathcal{F}, \mu)$ sa vraví *priestor s (konečne aditívnou) mierou*, ak $\mathcal{F}$ je σ-algebra (algebra) na X a $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je (konečne aditívna) miera.
Predpokladajme teraz, že pracujeme v superštruktúre $\mathbb{V}(S)$, kde $X, \mathbb{R} \subset S$. Trojicu $(X, \mathcal{F}, \nu) \in \mathbb{V}(*S)$ budeme nazývať *interným priestorom s (konečne aditívnou) mierou*, ak platí:

- $X, \mathcal{F}, \nu$ sú interné a $\mathcal{F} \subset *\mathcal{P}(X)$,
- $\mathcal{F}$ je σ-algebra (algebra) na X,
- $\nu : \mathcal{F} \to *\mathbb{R}$ je (konečne aditívna) miera na $\mathcal{F}$.

Odteraz v ďalšom predpokladáme, že pracujeme v superštruktúre $\mathbb{V}(S)$ s vlastnosťami spomenutými v predošlej definícii, prípadne v jej neštandardnom rozšírení, ktoré je „dostatočne“ saturované (teda napríklad polysaturované).

Poznamenajme, že ak $(X, \mathcal{F}, \mu)$ je priestor s mierou (vo $\mathbb{V}(S)$), tak $(*X, *\mathcal{F}, *\mu)$ je interný priestor s konečne aditívnou mierou. Zobrazenie $*\mu$ vo väčšine prípadov nebude miera, rovnako ani $*\mathcal{F}$ nebude σ-algebra. (Vidno to napríklad z nasledujúcej lemy.) Samozrejme vďaka princípu prenosu $*\mu$ bude $*$-σ-aditívna množinová funkcia a $*\mathcal{F}$ bude $*$-σ-algebra (teda príslušné vlastnosti budú platiť ak budeme uvažovať systémy indexované cez celé $*\mathbb{N}$). Nasledujúca lema vlastne hovorí o tom, ako sa v interných algebrách správajú zjednotenia cez $\mathbb{N}$ (v ďalšom ich budeme volať spočítateľné).

Lema 1.11.1. *Nech $\mathcal{F}$ je interná algebra na $X \in *\mathbb{V}(S)$. Nech $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ a nech $A \in \mathcal{F}$. Predpokladajme, že $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Potom existuje také $m \in \mathbb{N}$, že $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.*

Dôkaz. Nech $(A_i)_{i \in *\mathbb{N}}$ je interné predĺženie postupnosti $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Potom interná množina $\{m \in *\mathbb{N} \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i\}$ má najmenší prvok. Tento však musí byť konečný, pretože je vďaka predpokladu lemy je iste menší ako každé nekonečné prirodzené číslo. A je to. $\square$

Majme daný interný priestor s konečne aditívnou mierou $(X, \mathcal{F}, \nu)$. V ďalšom predpokladajme, že ν je konečná miera, teda že platí $\nu(X) < \infty$. Uvedené výsledky sú pre nás postačujúce; všeobecná teória je uvedená napríklad v [6]. Označme $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$. Definujme $^\circ\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ ako $^\circ\nu(A) = {}^\circ(\nu(A))$. Označme ďalej $\sigma(\mathcal{F})$ najmenšiu (v zmysle inklúzie) σ-algebru obsahujúcu $\mathcal{F}$ (môže obsahovať interné aj externé množiny).

Veta 1.11.2. *Pri označení ako v predošlom odstavci platí, že $^\circ\nu$ má jediné σ-aditívne rozšírenie $\lambda : \sigma(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}^+$. Pre každé $B \in \sigma(\mathcal{F})$ platí $\lambda(B) = \inf\{^\circ\nu(A) \mid A \in \mathcal{F}, B \subset A\} = \sup\{^\circ\nu(A) \mid A \in \mathcal{F}, A \subset B\}$ a existuje také $A \in \mathcal{F}$, že $\lambda((B - A) \cup (A - B)) = 0$.*

Dôkaz. Vidno, že $^\circ\nu$ je konečne aditívna. Existenciu a jednoznačnosť žiadaného λ odôvodníme odvolaním sa na Carathéodoryho konštrukciu, ktorá je štandardná v teórii miery (pozri napríklad [23]). Táto však žiada overiť σ-aditívnosť $^\circ\nu$, čiže nasledujúcu vlastnosť: Ak $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť množín z $\mathcal{F}$ a $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, tak $^{\circ}\nu(A_i) \to {}^{\circ}\nu(A)$. Ale vďaka predošlej leme predpoklad implikuje $A = A_m$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$, čo však znamená, že konvergencia je splnená triviálne.

Z tejto konštrukcie ďalej plynie, že aj λ je konečná miera a že pre každé $B \in \sigma(\mathcal{F})$ a $\epsilon > 0$ existuje postupnosť $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ množín z $\mathcal{F}$ taká, že $A_n \subset A_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} \supset B$ a $^{\circ}\nu(C) < \lambda(B) + \epsilon$. Túto postupnosť môžme predĺžiť na $*\mathbb{N}$. Z princípu pretečenia plynie existencia nekonečného $N \in *\mathbb{N}$, pre ktoré platí, že pre každé $1 \leq n \leq N$ máme $A_{n-1} \subset A_n$, $A_n \in \mathcal{F}$ a $^{\circ}\nu(A_n) < \lambda(B) + \epsilon$. Ďalej $B \subset C \subset A_N$. Keďže $\epsilon > 0$ bolo ľubovoľné, tak skutočne $\lambda(B) = \inf\{^{\circ}\nu(A) \mid A \in \mathcal{F}, B \subset A\}$.

Tento postup môžme zopakovať pre množinu $X - B$, čím získame $\lambda(B) = \sup\{^{\circ}\nu(A) \mid A \in \mathcal{F}, A \subset B\}$. (Využívame konečnosť miery.)

Z týchto úvah máme pre každé $n \in \mathbb{N}$ existenciu postupností množín $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z $\mathcal{F}$ s vlastnosťami $C_{n-1} \subset C_n \subset B \subset A_n \subset A_{n-1}$ a $\nu(A_n - C_n) < 1/n$ pre $n \geq 1$. Predĺžením postupnosti $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na celé $*\mathbb{N}$ a aplikovaním princípu pretečenia na množinu $\{A_n \mid A_n \subset C_k, k \in \mathbb{N}\}$ získame nekonečné $N \in *\mathbb{N}$ a $A_N \in \mathcal{F}$, pre ktorú platí $A_N \subset C_k$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$. Z monotónnosti postupnosti $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dostaneme, že aj $A_k \subset A_N$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$. Z tohto ľahko vidieť, že platí $\lambda((B - A) \cup (A - B)) = 0$. □

Poznámka. Zúplnením $(X, \sigma(F), \lambda)$ z predošlej vety získame priestor $(X, L(\mathcal{F}), L(\nu))$. Tento priestor s mierou sa zvyčajne nazýva *Loebov priestor* (asociovaný s $(X, \mathcal{F}, \nu)$), $L(\mathcal{F})$ *Loebova σ-algebra*, množiny v $L(\mathcal{F})$ *Loebovsky merateľné* a napokon $L(\nu)$ *Loebova miera.*

Definícia 19. Funkcia $f : X \to \mathbb{R}$ sa volá *merateľná* vzhľadom ku $\mathcal{F}$ (prípadne $\mathcal{F}$-merateľná), ak pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\} \in \mathcal{F}$. Ak $\mathcal{F}, \mathcal{A}$ sú σ-algebry na X, Y, tak hovoríme, že zobrazenie $f : X \to Y$ je *merateľné vzhľadom ku $\mathcal{F}$ a $\mathcal{A}$*, ak $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ pre každé $A \in \mathcal{A}$.

Veta 1.11.3. *Pri označení ako vyššie, ak $f : X \to *\mathbb{R}$ je konečná, $\mathcal{F}$-merateľná, interná funkcia, potom platí*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\nu \approx \int_X {}^{\circ}f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $f(x) \geq 1$ pre všetky $x \in X$. Totiž $|f|$ je ohraničená každým nekonečným prirodzeným číslom, princíp pretečenia nám dá ohraničenie nejakým $n \in \mathbb{N}$. To však znamená, že $f(x) + n + 1 \geq 1$. Platnosť tvrdenia vo vete pre funkcie zdola ohraničené jednotkou nám zaručí $\int (f + n + 1) \,\mathrm{d}\nu \approx \int (^{\circ}f + n) \,\mathrm{d}\lambda$. Keďže $\int n \,\mathrm{d}\nu \approx \int n \,\mathrm{d}\lambda$, tak aj $\int f \,\mathrm{d}\nu \approx \int {}^{\circ}f \,\mathrm{d}\lambda$.

Zvoľme $\epsilon > 0$. Keďže ν je konečná miera, tak množina $D = \{r \in \mathbb{R} \mid \lambda(^{\circ}f^{-1}(\{r\})) > 0\}$ je nanajvýš spočítateľná. To ale znamená, že vieme vybrať postupnosť $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m$ reálnych čísel s vlastnosťami

- $y_m > \sup\{^{\circ}f(x) \mid x \in X\}$,
- $y_i \notin D$ pre všetky $0 \leq i \leq m$,
- $y_i - y_{i-1} < \epsilon/3M$, kde $M = \lambda(X) + 1$, pre $1 \leq i \leq m$.

Voľbu sme vlastne robili tak, aby v žiadnom z bodov y_i nebola sústredená nenulová miera a aby medzi y_0 a y_m boli všetky funkčné hodnoty f. Označme ďalej

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{m} y_{i-1}\nu(f^{-1}[y_{i-1}, y_i)), \qquad \bar{S}_\nu = \sum_{i=1}^{m} y_i\nu(f^{-1}[y_{i-1}, y_i)),$$
$$S_\lambda = \sum_{i=1}^{m} y_{i-1}\lambda({}^\circ f^{-1}[y_{i-1}, y_i)), \qquad \bar{S}_\lambda = \sum_{i=1}^{m} y_{i-1}\lambda({}^\circ f^{-1}[y_{i-1}, y_i)).$$

Potom platí

$$S_\nu \leq \int_X f\,\mathrm{d}\nu \leq \bar{S}_\nu, \qquad S_\lambda \leq \int_X {}^\circ f\,\mathrm{d}\lambda \leq \bar{S}_\lambda,$$
$$\bar{S}_\nu - S_\nu \leq \frac{\epsilon}{3M}\sum_{i=1}^{m} \nu(f^{-1}[y_{i-1}, y_i)) = \frac{\epsilon \cdot \nu(X)}{3M} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Podobne aj $\bar{S}_\lambda - S_\lambda < \epsilon/3$. Pre $i \in \{1, \dots, m\}$ platí

$${}^\circ f^{-1}(y_{i-1}, y_i) \subset f^{-1}(y_{i-1}, y_i) \subset f^{-1}[y_{i-1}, y_i] \subset {}^\circ f^{-1}[y_{i-1}, y_i].$$

Preto potom

$$\begin{aligned}\lambda({}^\circ f^{-1}[y_{i-1}, y_i]) = \lambda({}^\circ f^{-1}[y_{i-1}, y_i)) = \lambda({}^\circ f^{-1}(y_{i-1}, y_i)) \leq \\ \leq \lambda(f^{-1}(y_{i-1}, y_i)) \approx \nu(f^{-1}(y_{i-1}, y_i)) \leq \nu(f^{-1}[y_{i-1}, y_i)) \leq \\ \leq \nu(f^{-1}[y_{i-1}, y_i]) \approx \lambda(f^{-1}[y_{i-1}, y_i]) \leq \lambda({}^\circ f^{-1}[y_{i-1}, y_i]).\end{aligned}$$

Z toho však plynie $S_\nu \approx S_\lambda$, čiže spolu s nerovnosťami vyššie máme $|\int_X f\,\mathrm{d}\nu - \int_X {}^\circ f\,\mathrm{d}\lambda| < \epsilon$. Keďže $\epsilon > 0$ bolo ľubovoľné, tvrdenie je dokázané. □

Nech $(X, \mathcal{T})$ je kompaktný Hausdorffov priestor, $C(X)$ je priestor spojitých reálnych funkcií na X. Nech $\mathcal{F}$ je σ-algebra na X.

Definícia 20. Najmenšiu σ-algebru na X, pre ktorú je každé $f \in C(X)$ merateľné, budeme nazývať *Bairova* σ-algebra (označenie $\mathcal{B}(X)$); jej prvky bairovské množiny a funkcie merateľné vzhľadom k nej bairovsky merateľné funkcie. Ak nejaká miera je definovaná (aspoň) na $\mathcal{B}(X)$, budeme jej hovoriť bairovská.

Keďže X je kompaktná množina, tak vieme, že pre každý prvok $x \in {*X}$ existuje jeho štandardná časť ${}^\circ x \in X$. Predpokladajme teraz, že $\Omega \subset {*X}$ je interná a platí $X = \{{}^\circ x \mid x \in \Omega\}$ (skrátene $X = \mathrm{st}(\Omega)$). Označme ešte $\mathcal{A}$ algebru interných bairovských množín v Ω a $\sigma(\mathcal{A})$ najmenšiu (externú) σ-algebru obsahujúcu $\mathcal{A}$.

Veta 1.11.4. *Pri označení ako v predošlom odstavci platí, že* $\mathrm{st} : \Omega \to X$ *je zobrazenie merateľné vzhľadom ku* $\sigma(\mathcal{A})$ *a* $\mathcal{B}(X)$. *Ďalej nech* ν *je interná* $\mathcal{A}$*-miera na* Ω *so* ${}^\circ\nu(\Omega) < \infty$, λ *je rozšírenie dané vetou 1.11.2 a* $P : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}^+$ *je zobrazenie dané pre* $B \in \mathcal{B}(X)$ *vzťahom* $P(B) = \lambda(\mathrm{st}^{-1}(B))$. *Potom* P *je bairovská miera na* X *a pre každé* $f \in C(X)$ *platí*

$$\int_X f\,\mathrm{d}P = \int_\Omega {}^\circ({*f})\,\mathrm{d}\lambda \approx \int_\Omega {*f}\,\mathrm{d}\nu. \tag{1.4}$$

Dôkaz. Nech $f \in C(X)$. Z definície $\mathcal{B}(X)$ plynie, že táto σ-algebra je generovaná množinami typu $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}$. Pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ však platí

$$\mathrm{st}^{-1}(\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}) = \{\omega \in \Omega \mid {}^\circ({*}f(\omega)) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid {*}f(\omega) < \alpha - \frac{1}{n}\} \in \sigma(\mathcal{A}),$$

takže st je merateľné. Tvrdenie, že P je bairovská miera je vďaka merateľnosti st jasné z konštrukcie. Formulka (1.4) plynie jednoducho z vety 1.11.3 a z toho, že ${}^\circ({*}f(\omega)) = f({}^\circ\omega)$ (čo platí vďaka spojitosti f). □

V aplikácii, kde použijeme tento aparát, budeme mať Ω hyperkonečnú množinu. V tomto prípade môžme za $\mathcal{A}$ jednoducho vziať ${*}\mathcal{P}(\Omega)$ (čo je tiež hyperkonečná množina). Za ν vezmeme váženú počítaciu mieru. (To znamená, že pre každému $\omega \in \Omega$ priradíme „váhu“ $p(\omega) \in {*}\mathbb{R}^+$ a položíme $\nu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ pre každé $A \in {*}\mathcal{P}(\Omega)$. Takáto funkcia ν je samozrejme interná miera.) V tomto prípade integrovanie cez Ω je obyčajná sumácia. Takže formulka (1.4) prejde na tvar

$$\int_X f \, \mathrm{d}P \approx \sum_{\omega \in \Omega} {*}f(\omega) p(\omega).$$

Kapitola 2

Aplikácie NSA

2.1 Neštandardný dôkaz Hahnovej–Banachovej vety

Myšlienka tu uvedeného dôkazu súvisí s pôvodným Banachovým dôkazom tejto vety, ktorý ukazoval možnosť rozšírenia funkcionálu o ďalší rozmer; a potom skonštatoval, že stačí teraz zvyšné rozmery dobre usporiadať a použiť transfinitnú indukciu. Analógia toho je „hyperfinitná“ indukcia urobená tu.

Zopakujme znenie vety.

Veta 2.1.1 (Hahnova–Banachova). *Nech E je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, S jeho podpriestor, $f : S \to \mathbb{R}$ lineárny funkcionál. Nech ďalej $p : E \to \mathbb{R}$ je sublineárny funkcionál na E a platí $\forall x \in E : f(x) \leq p(x)$. Potom existuje lineárny funkcionál $\bar{f}$ na E taký, že $\bar{f}\restriction_S = f$ a $\forall x \in E$ platí $\bar{f}(x) \leq p(x)$.*

Dokážme najprv túto vetu pre konečnorozmerné priestory E len pomocou prostriedkov „prvého rádu“. Skutočne, v konečnorozmerných priestoroch je táto veta dokázateľná matematickou indukciou pomocou metód lineárnej algebry. Potom aplikovaním princípu prenosu „natiahneme“ tento výsledok na „ľubovoľne“ veľké vektorové priestory.

Lema 2.1.2. *Hahnova–Banachova veta platí pre konečnorozmerné priestory.*

Dôkaz. Nech dimenzia E je $n \in \mathbb{N}$, potom aj S je konečnorozmerný s dimenziou $m < n$. To znamená, že v S máme bázu $g_1, \ldots, g_m$, a túto vieme doplniť $n - m$ vektormi na bázu $g_1, \ldots, g_n$ v E.

Označme $S_i = [g_1, \ldots, g_i]$ pre $i = m, m{+}1, \ldots, n$. (Teda $S_m = S, S_n = E$.) Teraz definujme matematickou indukciou (konečnou) postupnosť lineárnych funkcionálov $f_i : S_i \to \mathbb{R}$ pre $i = m, \ldots, n$ s vlastnosťami:

(i) $f_i(x) \leq p(x)$ pre všetky $x \in S_i$.

(ii) $f_i\restriction_S = f$.

Prvý krok je jasný: f_m položme priamo rovné f.
Druhý krok: definujme f_{i+1} pomocou f_i. Keďže $S_{i+1} = S_i \oplus [g_{i+1}]$, tak každé $x \in S_{i+1}$ vieme jednoznačne rozložiť na $x = r{+}c{\cdot}g_{i+1}$, kde $r \in S_i$. Položme teraz $f_{i+1}(r{+}c{\cdot}g_{i+1}) = f_i(r){+}c{\cdot}K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je vhodná konštanta, ktorú určíme v ďalšom tak, aby platilo (i). (Platnosť (ii) plynie triviálne z konštrukcie.)

Zoberme teda nejaké $x = r + c \cdot g_{i+1} \in S_{i+1}$. Rozoberme dva prípady pre znamienko c. (Prípad $c = 0$ netreba špeciálne uvažovať, lebo platnosť (i) plynie z indukčného predpokladu).

$c > 0$: Máme zabezpečiť platnosť $f_{i+1}(x) \leq p(x)$, po dosadení vyjadrenie pre x teda

$$\begin{aligned} f_i(r) + c \cdot K = f_{i+1}(r + c \cdot g_{i+1}) &\leq p(r + c \cdot g_{i+1}), \quad \text{po úprave} \\ K \leq \frac{p(r + c \cdot g_{i+1}) - f(r)}{c} &= p(\frac{r}{c} + g_{i+1}) - f_i(\frac{r}{c}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Táto nerovnosť má platiť pre ľubovoľné $r \in S_{i+1}$ a $c > 0$.

$c < 0$: Tentokrát po dosadení dostávame nerovnosť

$$K \geq -p(-\frac{r}{c} - g_{i+1}) - f_i(\frac{r}{c}) \tag{2.2}$$

pre všetky $r \in S_{i+1}$ a $c < 0$.

Rátajme teraz rozdiel pravých strán nerovníc (2.1) a (2.2), pričom za „ľubovoľné r a c" z prvej zoberme r_1 a c_1, z druhej r_2 a c_2. Využitím linearity f_i, homogenity p a znamienok c_1 a c_2 dostávame

$$\begin{aligned} p(\frac{r_1}{c_1} + g_{i+1}) - f_i(\frac{r_1}{c_1}) - \left(-p(-\frac{r_2}{c_2} - g_{i+1}) - f_i(\frac{r_2}{c_2})\right) = p(\frac{r_1}{c_1} + g_{i+1}) + \\ + p(-\frac{r_2}{c_2} - g_{i+1}) - f_i(\frac{r_1}{c_1} - \frac{r_2}{c_2}) \geq p(\frac{r_1}{c_1} - \frac{r_2}{c_2}) - f_i(\frac{r_1}{c_1} - \frac{r_2}{c_2}) \geq 0, \end{aligned}$$

pričom nerovnosti sú vďaka vlastnostiam p a indukčnému predpokladu. To ale znamená, že pravá strana (2.1) je „stále väčšia" ako pravá strana (2.2). Presnejšie, bude existovať číslo, ktoré bude dolným ohraničením pravej strany (2.1) pre hocaké r a $c > 0$ a zároveň horným ohraničením pravej strany (2.2) pre ľubovoľné r a $c < 0$. No a to je naše hľadané K. Týmto je druhý indukčný krok hotový.

Získali sme teda lineárny funkcionál $f_n : E \to \mathbb{R}$, ktorý má vlastnosti požadované v znení Hahnovej–Banachovej vety. Stačí teda položiť $\bar{f} = f_n$ a dôkaz lemy je hotový. □

Ukážme teraz, ako môžeme tento „konečnorozmerný" výsledok použiť pre nekonečnorozmerné priestory. Označme $\mathcal{F}_E$ množinu všetkých konečnorozmerných podpriestorov vektorového priestoru E. Z vety 1.8.7 máme $F \in *\mathcal{F}_E$, pre ktoré platí $E \subset F \subset *E$ a $\dim(F) \in *\mathbb{N}$. Existencia bázy (presnejšie $*$-bázy) v takýchto priestoroch je zabezpečená princípom prenosu. Totiž platí

$$\models (\forall H \in \mathcal{F}_E) \left(\exists \text{ postupnosť } (e_i)_{i=1}^{\dim H} \subset H\right) \left(H = \left\{\textstyle\sum_{i=1}^{\dim H} \alpha_i e_i; \alpha_i \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

pričom „postupnosť" chápeme ako zobrazenie z príslušnej množiny prirodzených čísel. „Ohviezdičkovaním" dostaneme presne existenciu bázy vo všetkých priestoroch $H \in *\mathcal{F}_E$.

Vlastnosť „byť konečnorozmerný" sa zrejme prenáša na všetky podpriestory konečnorozmerného priestoru, teda platí

$$\models (\forall H \in \mathcal{F}_E)\, (\forall L \subset K)\, (VP(L) \implies L \in \mathcal{F}_E \wedge \dim L \leq \dim K)\,.$$

Výraz $VP(L)$ znamená, že L spĺňa axiómy vektorového priestoru (ktoré iste vieme vyjadriť formulami príslušného jazyka). Podľa princípu prenosu teda platí

$$* \models (\forall H \in *\mathcal{F}_E)\, (\forall L \subset K)\, (VP(L) \implies L \in *\mathcal{F}_E \wedge \dim L \leq \dim K)\,,$$

čo znamená, že to funguje aj pre $*$-konečné priestory.

Označme $P = *S \cap F$. Zrejme P je interný podpriestor F, teda aj on je $*$-konečnorozmerný a platí $\dim P \leq \dim F$.

Funkcionál $*p : *E \to *\mathbb{R}$ je interný sublineárny, $*f\restriction_P : P \to *\mathbb{R}$ je interný lineárny, odvolaním sa na princíp prenosu a vetu 2.1.2 vieme $*f\restriction_P$ rozšíriť na celý priestor F. Máme teda interný lineárny funkcionál $\tilde{f} : F \to *\mathbb{R}$, ktorý spĺňa

(i) $\tilde{f}(x) \leq *p(x)$ pre všetky $x \in F$,

(ii) $\tilde{f}\restriction_P = *f\restriction_P$.

Keďže $E \subset F$, tak vďaka (i) platí $-*p(-x) \leq -\tilde{f}\restriction_E(-x) = \tilde{f}\restriction_E(x) \leq *p(x)$ pre $x \in E$. Na druhej strane ale pre tie isté x platí $*p(x) = p(x) = \operatorname{st} *p(x)$, teda pre $x \in E$ existuje štandardná časť $\operatorname{st} \tilde{f}(x)$.

Položme $\bar{f} = \operatorname{st}\left(\tilde{f}\restriction_E\right)$. Zrejme platí $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in E$

$$\bar{f}(\alpha x + \beta y) = \operatorname{st}\left(\tilde{f}\restriction_E(\alpha x + \beta y)\right) = \operatorname{st}\left(\alpha \tilde{f}\restriction_E(x) + \beta \tilde{f}\restriction_E(y)\right) =$$
$$= \alpha \operatorname{st}\left(\tilde{f}\restriction_E(x)\right) + \beta \operatorname{st}\left(\tilde{f}\restriction_E(y)\right) = \alpha \bar{f}(x) + \beta \bar{f}(y),$$

čiže $\bar{f}$ je lineárny funkcionál na E. Ďalej z (i) pre $x \in E$ dostávame $\bar{f}(x) = \operatorname{st}\left(\tilde{f}\restriction_E(x)\right) \leq \operatorname{st} *p(x) = p(x)$. Ak na obe strany (ii) aplikujeme zobrazenie štandardná časť, dostaneme $\bar{f}\restriction_S = f$.

Nájdené zobrazenie $\bar{f}$ vyhovuje požiadavkám Hahnovej–Banachovej vety, teda jej dôkaz je tým hotový.

2.2 Neštandardný dôkaz Arzelà–Ascoliho lemy

Vyslovíme a dokážeme Arzelà–Ascoliho lemu vo všeobecnej verzii.

Definícia 21. Nech X a Y sú topologické priestory a nech $C(X,Y)$ značí množinu všetkých spojitých funkcií z X do Y. *Kompaktno–otvorená* topológia na $C(X,Y)$ je daná nasledovne: Označme $[K,U] = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$ pre $K \subset X$ kompaktnú a $U \subset Y$ otvorenú. Systém všetkých množín tohto typu tvorí subbázu kompaktno–otvorenej topológie. Označme ju $\mathcal{S}$. Ďalej označme jej bázu (teda systém konečných prienikov množín z $\mathcal{S}$) ako $\mathcal{B}$.

Veta 2.2.1 (Arzelà–Ascoliho lema). *Nech X je lokálne kompaktný topologický priestor, Y je Hausdorffov uniformný priestor (s uniformitou $\mathcal{U}$). Uvažujme $C(X,Y)$ vybavenú kompaktno–otvorenou topológiou. Nech $A \subset C(X,Y)$ je množina. Potom A je relatívne kompaktná v $C(X,Y)$ práve vtedy, keď*

(a) pre každé $x \in X$ je množina $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$ relatívne kompaktná v Y,

(b) pre každé $x \in X$ a pre každé $V \in \mathcal{U}$ existuje okolie U bodu x v X také, že pre všetky $y \in U$ a všetky $f \in A$ platí $(f(x), f(y)) \in V$.

Dôkaz. Na dôkaz implikácie „$\Longleftarrow$“ stačí vďaka vete 1.9.2 ukázať, že každý prvok $f \in *A$ je skoroštandardný, teda že existuje $g \in C(X,Y)$ s vlastnosťou $*g \approx f$ v $*C(X,Y)$.

Nech teda $F \in *A$ a nech $x \in X$. Z (a) máme, že $A(x)$ je relatívne kompaktná, teda každý prvok z $*A(x) = \{f(x) \mid f \in *A\}$ je skoroštandardný. Špeciálne $F(x)$ je skoroštandardný.

Z predpokladu hausdorffovosti priestoru Y vieme, že je dobre definovaná štandardná časť takéhoto prvku. Položme $g(x) = {}^\circ F(x)$. Dostávame teda dobre definované zobrazenie $g : X \to Y$.

Vďaka (b) vieme, že pre každé $x \in X$ a (môžme brať uzavretú) $V \in \mathcal{U}$ existuje otvorená množina U obsahujúca x tak, že platí

$$\models (\forall f \in A)(\forall y \in U)\ \ (f(x), f(y)) \in V.$$

Opäť aplikujeme princíp prenosu a dostávame

$$* \models (\forall f \in *A)(\forall y \in *U)\ \ (f(x), f(y)) \in *V.$$

„Dosadením“ F za f dostávame, že pre každé $y \in *U$ platí $(F(x), F(y)) \in *V$. Zoberme $y \in U$. Preň platí $(g(x), g(y)) \approx (F(x), F(y))$ v $Y \times Y$ (relácie $\approx$ platia po zložkách). Uzavretosť V je podľa vety 1.9.2 ekvivalentná s tým, že $\mu((u, v)) \cap *V \neq \emptyset$ implikuje $(u, v) \in V$ pre hocaké $(u, v) \in Y \times Y$. V našej situácii dostávame $(g(x), g(y)) \in V$, pretože $(F(x), F(y)) \in \mu((g(x), g(y))) \cap *V$.

Keď to zhrnieme, dostávame, že pre každé $x \in X$ a (uzavreté) $V \in \mathcal{U}$ existuje otvorené okolie x také, že pre každé $y \in U$ máme $(g(x), g(y)) \in V$. To však znamená spojitosť funkcie g na X, teda $g \in C(X, Y)$.

Dôkaz zavŕšime, ak ukážeme $*g \approx F$. Z definícií je to ekvivalentné tomu, že

$$\begin{aligned} F \in \mu(g) = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ g \in B}} *B = \bigcap_{\substack{S_1,\dots,S_n \in \mathcal{S} \\ g \in S_1 \cap \dots \cap S_n}} \bigcap_{i=1}^{n} *S_i = \bigcap_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ g \in S}} *S\ = \\ = \bigcap_{\substack{[K,U] \in \mathcal{S} \\ g \in [K,U]}} *[K, U] = \bigcap_{\substack{[K,U] \in \mathcal{S} \\ g \in [K,U]}} \{f \in *C(X, Y) \mid f(*K) \subset *U\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Inak povedané, $F \approx *g$ práve vtedy, keď pre každú kompaktnú $K \subset X$ a otvorenú $U \subset Y$ z $g(K) \subset U$ vyplýva $F(*K) \subset *U$.

Uvedomme si, že pre ľubovoľné $f \in *A$ a pre každé $x \in X$ a $y \approx x$ máme $f(y) \approx f(x)$. Ak označíme $V_z = \{y \in Y \mid (z, y) \in V\}$ pre $V \in \mathcal{U}$ a $z \in Y$ (množiny tohto typu tvoria bázu okolí bodu z), tak z (b) plynie, že pre každé $x \in X$ a okolie typu $V_{f(x)}$ bodu $f(x)$ existuje okolie U bodu x také, že platí

$$\models (\forall f \in A)\,(f(U) \subset V_{f(x)}).$$

Pre každé $f \in *A$ teda vďaka princípu prenosu platí $* \models f(*U) \subset *V_{f(x)}$. Záver argumentu je totožný s dôkazom vety 1.9.3. (Z $y \approx x$ plynie $y \in *U$, teda $f(y) \in *V_{f(x)}$; preto $f(y)$ patrí do každej množiny typu $*V_{f(x)}$, a teda $f(x) \approx f(y)$.)

Vezmime teda $K \subset X$ kompaktnú, $U \subset Y$ otvorenú, predpokladajme $g(K) \subset U$ a nech $x \in *K$. Z kompaktnosti K máme existenciu ${}^\circ x \in K$, z predpokladu potom platí $g({}^\circ x) \in U$. Keďže U je otvorená, z vety 1.9.2 máme $\mu(g({}^\circ x)) \subset *U$. Berúc do úvahy predošlý odstavec a definíciu g, dostávame $g({}^\circ x) \approx F({}^\circ x) \approx F(x)$, čo znamená $F(x) \in *U$. Tým je dôkaz jednej implikácie hotový.

Dokážme „$\Longrightarrow$“. Na úvod si uvedomme, že pre $f \in *C(X, Y)$ a $g \in C(X, Y)$ (s kompaktno–otvorenou topológiou), z $f \approx *g$ vyplýva $f(y) \approx g(x)$ pre každé $x \in *X$ a $y \approx x$. Totiž: Vďaka lokálnej kompaktnosti X a spojitosti g pre ľubovoľnú otvorenú U obsahujúcu $g(x)$ existuje kompaktné okolie K bodu x také, že $g(K) \subset U$. Keďže K je okolie bodu x, tak $\mu(x) \subset *K$, teda $y \in *K$. Použitím (2.3) dostávame, že $f(*K) \subset *U$, teda $f(y) \in *U$. Keďže U bolo ľubovoľné, tak $f(y) \in \mu(g(x))$, čiže $f(y) \approx g(x)$.

Predpokladajme teda, že A je relatívne kompaktná v $C(X,Y)$. Ukážme (a). Vezmime $x \in X$. Opäť vďaka vete 1.9.2 stačí ukázať, že každý prvok z $*A(x) = \{f(x) \mid f \in *A\} \subset *Y$ je skoroštandardný. Zoberme $f \in *A$, potom z predpokladu máme $g \in C(X,Y)$ s vlastnosťou $f \approx *g$, čiže $f(x) \approx g(x)$, pričom $g(x)$ je iste štandardný prvok v $*Y$. Teda (a) platí.

Pozrime sa na (b). Fixnime $x \in X$ a $V \in \mathcal{U}$. Nech ďalej $y \in *Y$ a $y \approx x$ a $f \in *A$. Z predpokladu existuje $g \in C(X,Y)$ také, že $*g \approx f$. Z toho plynie $g(x) \approx f(x)$ a $g(x) \approx f(y)$. Preto $(f(x), f(y)) \approx (g(x), g(x)) \in V$, z otvorenosti V máme $(f(x), f(y)) \in *V$. Z aproximačnej lemy preto máme interné $D \subset \mu(x)$ patriace do $*(\mathcal{T}_X)_x$, pre ktoré platí, že pre každé $y \in D$ a $f \in *A$ máme $(f(x), f(y)) \in *V$. Preto D je svedkom formuly

$$* \models (\exists U \in *(\mathcal{T}_X)_x)(\forall f \in *A)(\forall y \in U)\,(f(x), f(y)) \in *V.$$

Princíp prenosu dá platnosť

$$\models (\exists U \in (\mathcal{T}_X)_x)(\forall f \in A)(\forall y \in U)\,(f(x), f(y)) \in V,$$

čo je presne (b) pre zvolené $x \in X$ a $V \in \mathcal{U}$. □

2.3 Neštandardný dôkaz Riezsovej reprezentačnej vety

V ďalšom texte chápeme vektory ako riadkové, zápis $x \geq 0$ pre vektor x znamená, že každá zložka vektora x spĺňa príslušnú nerovnosť a napokon $x \cdot y$ značí skalárny súčin vektorov x a y.

Sformulujme vetu, ktorú budeme potrebovať. Patrí do optimalizačnej teórie a jej dôkaz sa dá nájsť v literatúre [21].

Veta 2.3.1 (Farkasova lema). *Nech A je matica typu $m \times n$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Potom $(\star)$ alebo $(\star\star)$ platia:*

- $(\star)$ $Ay^T = b^T$ *má nezáporné riešenie,*
- $(\star\star)$ cA *je nezáporné a* $c \cdot b < 0$ *pre nejaké* $c \in \mathbb{R}^m$.

Pozrime sa na samotnú Rieszovu vetu, ktorej dôkaz chceme predviesť.

Veta 2.3.2 (Rieszova veta o reprezentácii). *Nech X je kompaktný Hausdorffov priestor, $C(X)$ je vektorový priestor spojitých reálnych funkcií na X a $T : C(X) \to \mathbb{R}$ je kladný lineárny funkcionál. Potom existuje bairovská miera P na X taká, že $Tf = \int f dP$ pre každé $f \in C(X)$.*

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že prvky X aj $\mathbb{R}$ sú indivíduá superštruktúry $\mathbb{V}(S)$ a že $*\mathbb{V}(S)$ je polysaturované (čiže aj HF–saturované). Teda existuje hyperkonečná $\Omega \subset *X$ taká, že $X \subset \Omega$. Keďže však X je kompaktná, tak $\mathrm{st}(*X) = X$, a preto aj $\mathrm{st}(\Omega) = X$. Označme teraz $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ pre vhodné $n \in *\mathbb{N}$. Pre $f \in *C(X)$ píšme vektor $(f(\omega_1), \ldots, f(\omega_n)) \in *\mathbb{R}^n$ ako $f|_\Omega$.

Označme teraz C_0 Hamelovu bázu vektorového priestoru $C(X)$, ktorá obsahuje konštantnú funkciu $g(x) \equiv 1$. Takáto báza existuje vďaka axióme výberu. Tvrdíme, že existuje hyperkonečná $C_1 \subset *C_0$ taká, že $C_0 \subset C_1$, ktorá spĺňa podmienku

$$(\forall c \in *\mathbb{R}^m)(\textstyle\sum c_i f_i|_\Omega \geq 0 \implies \sum c_i f_i \geq 0), \tag{\#}$$

kde $m \in *\mathbb{N}$ je interná kardinalita C_1. Definujme $\mathcal{F} \in \mathbb{V}(S)$ ako systém všetkých konečných podmnožín C_0. Označme

$$A_f = \{X \in *\mathcal{F} \mid *f \in X,\ X \text{ spĺňa } (\#)\}$$

pre $f \in C_0$. Každé A_f je interná množina. Overme, že systém $\{A_f \mid f \in C_0\}$ má vlastnosť konečného prieniku. Nech $f_1, \ldots, f_k \in C_0$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Množina $K = \{*f_1, \ldots, *f_k\}$ je zjavne hyperkonečná a patrí do nej každé $*f_i$. Ak ukážeme, že spĺňa (#), tak máme

$$K \in A_{f_1} \cap \cdots \cap A_{f_k},$$

teda príslušný konečný prienik je neprázdny.

Dokážme teda, že K spĺňa (#). Poďme na to sporom. Nech pre nejaké $c = (c_1, \ldots, c_k) \in *\mathbb{R}^k$ platí síce

$$\sum c_i f_i|_\Omega \geq 0, \text{ ale } \sum c_i f_i < 0. \tag{2.4}$$

Keby aspoň jedno z c_i bolo nekonečné, tak zoberieme $d = \max_{1 \leq i \leq k} |c_i|$ (to iste existuje, pretože máme len konečne veľa hodnôt) a namiesto c vezmeme $c' = (\frac{c_1}{d}, \ldots, \frac{c_n}{d})$. Iste aj c' spĺňa (2.4) — stačí len každú z tých nerovností vydeliť kladným číslom d. Ak by všetky c_i boli nekonečne malé, tak zase miesto c vezmeme $c' = \frac{c}{d}$, kde $d = \max_{1 \leq i \leq k} |c_i|$. Môžme teda bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že žiadne z c_i nie je nekonečné (teda existujú štandardné časti) a aspoň jedno nie je nekonečne malé. Zoberme teraz $x \in X$, potom existuje $\omega \in \Omega$, že $\omega \approx x$. Potom z nerovností (2.4) a zo spojitosti každého f_i máme

$$0 \geq \mathrm{st}(\sum c_i f_i(x)) = \sum \mathrm{st}(c_i) f_i(x) \approx \sum \mathrm{st}(c_i) f_i(\omega) \approx \sum c_i f_i(\omega) \geq 0.$$

Z toho ale plynie, že $\sum \mathrm{st}(c_i) f_i = 0$. Vďaka tomu, že aspoň jedno c_i nie je nekonečne malé, táto lineárna kombinácia f_i je netriviálna. To je ale spor s lineárnou nezávislosťou f_i ako prvkami bázy.

Keďže $C_0 \subset C(X) \in \mathbb{V}(S)$, tak $\mathrm{card}(C_0) \leq \mathrm{card}(\mathbb{V}(S))$. Z toho, že rozšírenie je polysaturované, plynie existencia takého C_1, ktoré leží v prieniku všetkých A_f pre $f \in C_0$. To ale znamená, že $C_1 \subset *C_0$ je hyperkonečná, patrí do nej každé $*f$ pre $f \in C_0$ a navyše spĺňa podmienku (#).

Nech teraz A je interná matica typu $m \times n$ nad $*\mathbb{R}$, ktorej i-ty riadok je $f_i|_\Omega$ a nech $b = (*Tf_1, \ldots, *Tf_m) \in *\mathbb{R}^m$. Uvažujme rovnicu $Ay^T = b^T$ v $*\mathbb{R}^n$. Pozrime sa na podmienku ($\star\star$) vo Farkasovej leme. Ak cA je nezáporný vektor pre dáke $c \in *\mathbb{R}^m$, tak to vlastne znamená, že $\sum c_i f_i|_\Omega \geq 0$. Z podmienky (#) teraz máme, že potom aj $\sum c_i f_i \geq 0$. Vďaka princípu prenosu $*T$ je tiež lineárny a pozitívny, teda

$$c \cdot b = \sum c_i {*T} f_i = *T\left(\sum c_i f_i\right) \geq 0.$$

To ale znamená, že podmienka ($\star\star$) nemôže platiť, musí byť pravdivá ($\star$). Použili sme samozrejme $*$-verziu Farkasovej lemy, ktorá platí opäť vďaka princípu prenosu. Takže existuje nezáporné $y \in *\mathbb{R}^n$ riešenie rovnice $Ay^T = b^T$. Inak povedané, platí $*Tf_i = f_i|_\Omega \cdot y$ pre $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Poďme skonštruovať mieru. Pre $E \subset \Omega$ položme jej mieru rovnú $p(E) = \sum_{\omega_i \in E} y_i$. Overme, že takáto množinová funkcia spĺňa predpoklady vety o hyperkonečnej miere. Je iste interná vážená spočítavacia miera. Treba ešte dokázať, že $p(\Omega)$ je konečná. Lenže vieme, že jedna z funkcií $f_i \in C_1$ je konštantná funkcia g rovná 1, pretože takáto funkcia je v $C_0 \subset C_1$. Preto jeden z riadkov matice A je práve $g|_\Omega$ a teda platí

$$p(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} y_i = \sum_{\omega_i \in \Omega} 1 \cdot y_i = g|_\Omega \cdot y = *Tg.$$

Pretože g je štandardný prvok, tak platí $*Tg = Tg$ a to je iste konečné.

Veta 1.11.4 nám teraz dáva bairovskú mieru P na X takú, že platí

$$\int f \,\mathrm{d}P \approx \sum_\Omega *f(\omega)p(\omega) = f|_\Omega \cdot y$$

pre každé $f \in C(X)$. Špeciálne pre každé $f \in C_0$ dostávame

$$\int f \,\mathrm{d}P = \mathrm{st}(f|_\Omega \cdot y) = \mathrm{st}(*Tf) = Tf.$$

Pretože ale C_0 je báza priestoru $C(X)$, tak každé $f \in C(X)$ vieme vyjadriť ako konečnú lineárnu kombináciu prvkov z C_0 a preto predošlý vzťah platí aj pre každé $f \in C(X)$. Tým je dôkaz hotový. $\square$

2.4 ϵ-homomorfizmy

Definícia 22. Nech $(G, \cdot)$ je grupa, $(H, \cdot)$ je grupa na ktorej je daná invariantná metrika ρ. Nech $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ sú reálne čísla. Zobrazenie $f : G \to H$ nazývame *δ-homomorfizmom*, ak

$$\forall x, y \in G : \quad \rho(f(xy), f(x)f(y)) < \delta.$$

Hovoríme, že zobrazenia $f, g : G \to H$ sú *ϵ-blízko*, ak

$$\forall x \in G : \quad \rho(f(x), g(x)) < \epsilon.$$

Budeme sa zaoberať tým, za akých podmienok pre grupy G a H platí, že ak máme δ-homomorfizmus, tak je ϵ-blízko homomorfizmu.

2.4.1 ϵ-homomorfizmy kompaktných grúp

Definícia 23. Nech G je grupa a H je topologická grupa v superštruktúre $\mathbb{V}(S)$. Budeme hovoriť, že interné zobrazenie $f : *G \to *H$ je *skorohomomorfizmus*, ak $f(xy) \approx f(x)f(y)$ pre každé $x, y \in *G$.

Definícia 24. Nech $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ sú uniformné priestory. Nech $\mathcal{B}$ je báza uniformity $\mathcal{V}$. Nech $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{U}$ je zobrazenie. Hovoríme, že $f : X \to Y$ je *μ-spojité*, ak pre každé $x, y \in X$ a každé $B \in \mathcal{B}$ platí

$$(x, y) \in \mu(B) \implies (f(x), f(y)) \in B. \qquad (\star)$$

Pre ilustráciu sa pozrime na to, ako sa vyzerá predošlá definícia v prípade, že topológia na Y je generovaná metrikou ρ_Y. Báza uniformity na Y je potom napríklad systém $\{\{(x, y) \in Y^2 \mid \rho_Y(x, y) < 1/k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Zobrazenie μ potom môžeme chápať ako zobrazenie z $\mathbb{N}$ do uniformity $\mathcal{U}$, teda vlastne postupnosť množín z uniformity (označme tieto množiny priamo

μ_k). Toto je vlastne náš prípad, keďže na grupe H máme metriku a na G uniformitu prirodzene generovanú topológiou. Môžme potom preformulovať podmienku ($\star$) takto:

$$(x,y) \in \mu_k \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < 1/k. \tag{$\star\star$}$$

Poďme však ešte trocha ďalej a vezmime do úvahy, že aj uniformita na X je generovaná metrikou ρ_X. Potom stačí, aby μ sme chápali ako k nule klesajúcu postupnosť $\mu = (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kladných reálnych čísel. Je to preto, lebo na X je systém $\{\{(x,y) \in X^2 \mid \rho_X(x,y) < \mu_k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ báza uniformity $\mathcal{U}$. Podmienka ($\star$) bude potom vyzerať

$$\rho_X(x,y) < \mu_k \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < 1/k. \tag{$\star\star\star$}$$

Zrejme ak je nejaké zobrazenie μ-spojité, tak je rovnomerne spojité. Vlastne akýmsi spôsobom kontrolujeme „mieru spojitosti" zobrazenia. Platí aj to, že ak je zobrazenie rovnomerne spojité, potom je spojité pre nejaké konkrétne μ. Na to však potrebujeme axiómu výberu. Totiž, ak je zobrazenie rovnomerne spojité, tak pre každé $B \in \mathcal{B}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ také, že $(f \times f)(U \subset B)$. Teraz chceme definovať zobrazenie $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{U}$ tak, že každému $B \in \mathcal{B}$ priradí práve to $U \in \mathcal{U}$, ktoré nám dá definícia rovnomernej spojitosti. Vieme to urobiť jednotlivo pre každé B, ale existenciu takéhoto výberového zobrazenia vo všeobecnosti zaručí axióma výberu.

V skutočnosti si však vystačíme so saturovanosťou. Definujme pre každé $B \in \mathcal{B}$ množinu

$$Z_B = \{\eta : {*\mathcal{B}} \to {*\mathcal{U}} \mid f(*B) = *U\},$$

kde U je tá množina z $\mathcal{U}$, ktorej existenciu nám zaručí rovnomerná spojitosť f. Všetky množiny v systéme $\{Z_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ sú zjavne interné, navyše má vlastnosť konečného prieniku. Totiž v prieniku množín $Z_{B_1}, \dots, Z_{B_k}$ leží zobrazenie η definované pre každé $B \in *\mathcal{U}$ takto:

$$\eta(B) = \begin{cases} *U_i, & \text{ak } B = *B_i \text{ pre nejaké } i = 1, \dots, k, \\ *U_1, & \text{inak,} \end{cases}$$

kde opäť U_i je množina existujúca z definície rovnomernej spojitosti f. Takže z polysaturovanosti plynie, že prienik tohto systému je neprázdny, obsahuje funkciu povedzme η. Keďže pre každé $B \in \mathcal{B}$ leží η v Z_B, tak vieme, že $\eta(B)$ je štandardný prvok v $*\mathcal{U}$, a teda môžeme definovať nové zobrazenie $\gamma : \mathcal{B} \to \mathcal{U}$ tak, že položíme $\gamma(B)$ rovné tomu prvku v $\mathcal{U}$, ktorého obraz v zobrazení $*$ je práve $\eta(B)$. (Laxne povedané $\gamma(B) = \eta(B)$, ak chápeme superštruktúru $\mathbb{V}(S)$ ako podmnožinu (podštruktúru) $*\mathbb{V}(S)$.) Takto zostrojená γ má požadované vlastnosti.

V ďalšom budeme μ chápať ako v predošlých definíciách.

Veta 2.4.1. *Nech G je kompaktná grupa a H je kompaktná metrická grupa. Potom pre každé μ a $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že*

> *ak f je μ-spojitý δ-homomorfizmus, tak existuje Spojitý homomorfizmus g, ktorý je ϵ-blízko f.*

Dokážeme pomocnú lemu a potom uvedieme dôkaz vety.

Lema 2.4.2. *Nech G je topologická grupa a H kompaktná metrická grupa. Ak interné $f : *G \to *H$ je $*\mu$-spojitý skorohomomorfizmus, potom existuje rovnomerne spojitý homomorfizmus $\varphi : G \to H$ taký, že $\varphi(x) \approx f(x)$ pre každé $x \in G$.*

Dôkaz. Keďže H je kompaktná, tak každý jej prvok je skoroštandardný. Teda môžeme položiť $\varphi(x) = \mathrm{st}(f(x))$ pre každé $x \in G$. Zobrazenie φ je iste z G do H a platí

$$\varphi(xy) = \mathrm{st}(f(xy)) = \mathrm{st}(f(x)f(y)) = \mathrm{st}(f(x))\,\mathrm{st}(f(y)) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Teda φ je homomorfizmus.

Stačí už len dokázať rovnomernú spojitosť φ. Ukážeme, že je η-spojité, pre vhodné η. Z definície $*\mu$-spojitosti f plynie pre $x, y \in G$ a $n \in \mathbb{N}$, že ak $(x, y) \in \mu_n$, tak $\rho(f(x), f(y)) < 1/n$. Potom ale z trojuholníkovej nerovnosti máme

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \rho(\varphi(x), f(x)) + \rho(f(x), f(y)) + \rho(f(y), \varphi(y)) < \alpha + \frac{1}{n} + \beta,$$

kde $\alpha = \rho(\varphi(x), f(x))$ a $\beta = \rho(f(y), \varphi(y))$ sú nekonečne malé čísla (plynie z definície φ). Ak aplikujeme štandardnú časť na oboch stranách nerovnosti, máme

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}.$$

Stačí teda vziať postupnosť $\eta_n = \mu_{n+1}$, a máme, že φ je η-spojité. Z toho však plynie, že je rovnomerne spojité. $\square$

Dôkaz vety 2.4.1. Zase postupujme sporom. Voľme za δ postupne čísla $1/n$ pre $n \in \mathbb{N}$. Dostaneme postupnosť $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ-spojitých $\frac{1}{n}$-homomorfizmov z G do H, ktoré sú aspoň ϵ-ďaleko od akéhokoľvek homomorfizmu. Predĺžením dostaneme vo $*\mathbb{V}(S)$ postupnosť $*f$. Jej prvkom pre každé $n \in *\mathbb{N}$ je (interné) zobrazenie z $*G$ do $*H$. (Budeme ich značiť pomerne prirodzene $(*f)_n$.)

Ukážeme, že pre každé $n \in *\mathbb{N}$ je $(*f)_n$ $*\mu$-spojité zobrazenie. To je jednoduchý dôsledok princípu prenosu. Totiž, ak $C(f, \mu)$ bude značiť výrok „každý prvok postupnosti f je μ-spojité zobrazenie“, tak zrejme $\models C(f, \mu)$. Podľa princípu prenosu potom aj $* \models C(*f, *\mu)$, čo je presne to, čo chceme. Ešte konkretizujme výrok $C(f, \mu)$, aby sme rozptýlili prípadné pochyby o aplikovateľnosti princípu prenosu. Položme

$$C(f, \mu) \equiv (\forall n, k \in \mathbb{N})(\forall x, y \in G)((x, y) \in \mu_k \implies \rho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{1}{k}).$$

Z definície μ-spojitosti je zrejmé, že tento výrok vyjadruje presne to, čo chceme.

Množina tých $\delta \in *\mathbb{R}$, pre ktoré existuje $n \in *\mathbb{N}$ také, že $(*f)_n$ je interný δ-homomorfizmus, obsahuje ľubovoľne malé kladné reálne čísla. Podľa princípu pretečenia teda táto množina obsahuje aj nekonečne malé kladné hyperreálne číslo, povedzme η. Nech $N \in *\mathbb{N}$ je príslušný index, pre ktorý je $(*f)_N : *G \to *H$ η-homomorfizmom. Priamo z definícií však vidno, že potom $(*f)_N$ je aj skorohomomorfizmus. Jeho internosť plynie z toho, že je prvkom $*f$. V predošlom odstavci sme zistili, že je aj $*\mu$-spojitý. Z predošlej lemy teda plynie existencia rovnomerne spojitého homomorfizmu $\varphi : G \to H$ takého, že $\varphi(x) \approx (*f)_N(x)$ pre každé $x \in G$.

V tomto momente potrebujeme kompaktnosť G. Z nej totiž plynie, že každé $x \in *G$ je skoroštandardné, preto existuje $a \in G$ také, že $a \approx x$. Potom ale vďaka rovnomernej spojitosti φ a $(*f)_N$ máme

$$*\varphi(x) \approx *\varphi(a) \approx (*f)_N(a) \approx (*f)_N(x) \tag{2.5}$$

pre každé $x \in *G$.

Blížime sa k hľadanému sporu, aj keď si to vyžiada ešte nejaké to úsilie. Všimneme si, že platí

$$\models (\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in G)\,(\rho(f_n(x), \psi(x)) > \epsilon))\,,$$

pre hocaký homomorfizmus $\psi : G \to H$. Opäť princíp prenosu nám dá

$$* \models (\forall n \in *\mathbb{N})(\exists x \in *G)\,(\rho((*f)_n(x), *\psi(x)) > \epsilon))\,.$$

Teda ak na n zvolíme N a za ψ dáme φ, dostaneme $\rho((*f)_N(x), *\varphi(x)) > \epsilon$ pre dáke $x \in *G$. To už je konečne spor s formulkou (2.5) v predošlom odstavci. Hotovo. $\square$

Poznámka. Špeciálny prípad tejto vety pre G konečnú plynie aj z všeobecnejšej vety o *takmer–blízko* situácii, ktorú dokázal R. M. Anderson v článku [2].

2.4.2 Kontrapríklad

Článok D. Kazhdana [12] sa zaoberá podobným problémom ako my v tejto sekcii. On však predpokladá na grupách dodatočnú štruktúru (maticové grupy), preto jeho výsledky majú trocha iný charakter. Napriek tomu uvádza, že v článku [11] je dokázaná podobná veta (ako 2.4.1) pre kompaktné grupy. To ale nie je celkom pravda, pretože tam je dokázaná pre kompaktné Lieove grupy. V tomto pododseku uvedieme kontrapríklad, ktorý ukazuje, že všeobecne pre kompaktné grupy takéto tvrdenie neplatí (teda nemôžme vo vete 2.4.1 vynechať kontrolu spojitosti).

Pri konštrukcii si vypomôžeme práve Kazhdanovým článkom [12], kde dokázal vetu, ktorá nám pomôže tento kontrapríklad zostrojiť. Uvedieme ju v mierne upravenej podobe.

Veta 2.4.3. *Existuje $\epsilon > 0$ (môžme brať $\epsilon = 1$) a kompaktná grupa H (metrizovateľná (ľavou) invariantnou metrikou ϱ) taká, že pre každé $\Delta > 0$ existuje konečná grupa K_Δ a Δ-homomorfizmus $\pi_\Delta : K_\Delta \to H$ taký, že pre každý homomorfizmus $\varphi : K_\Delta \to H$ platí $\max_{x \in K_\Delta} \varrho(\pi_\Delta(x), \varphi(x)) \geq \epsilon$.*

Poznámka. Z konečnosti grupy K_Δ plynie jednak jej kompaktnosť, jednak (keďže je prirodzene vybavená diskrétnou topológiou) spojitosť všetkých zobrazení z nej.

Náznak dôkazu. Nech p je akékoľvek prvočíslo a n dostatočne veľké prirodzené číslo (aby $p^{-n} < \Delta$). Položme $K_\Delta = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ a $H = \mathbb{Z}_p$ (grupa p-adických celých čísel so zvyčajnou normou). Definujme zobrazenie π_Δ ako prirodzené vnorenie $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$. Ľahko možno overiť, že toto zobrazenie je p^{-n}-homomorfizmus. Keďže $\mathbb{Z}_p$ nemá žiadnu torziu, jediný homomorfizmus z K_Δ do H je triviálny $\theta \equiv 0$. Keďže platí $\sup_{x \in G} ||\pi_\Delta(x) - \theta(x)||_p = ||1 - 0||_p = 1$, jeho vzdialenosť od π_Δ je rovná 1. $\square$

Nasleduje avizovaný kontrapríklad.

Propozícia 2.4.4. *Existujú kompaktné grupy G a H, topológia na H generovaná (ľavou) invariantnou metrikou ϱ a $\epsilon > 0$ také, že pre každé $\delta > 0$ platí*

> *existuje spojitý δ-homomorfizmus $f : G \to H$, ktorý je ϵ-ďaleko od každého homomorfizmu $\varphi : G \to H$.*

Pod ϵ-ďaleko sa myslí, že existuje $x \in G$, pre ktoré platí $\varrho(f(x), \varphi(x)) \geq \epsilon$.

Dôkaz. Označme $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$. Pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ nazvime K_n konečnú grupu K_Δ, ktorej existencia plynie z vety 2.4.3 pre $\Delta = \frac{1}{n}$ a $\pi_n : K_n \to U$ príslušný (spojitý) $1/n$-homomorfizmus. Utvorme priamy súčin grúp $G = \prod_{n \in \mathbb{N}^+} K_n$ a vybavme ho súčinovou topológiou. Z Tichonovovej vety plynie, že G bude kompaktná. Za H berme priamo grupu rovnakého označenia z vety 2.4.3.

Vezmime $n \in \mathbb{N}^+$ dostatočne veľké tak, aby platilo $1/n < \delta$. Definujme zobrazenie $f_n : G \to H$ takto: ak $x = (x_1, x_2, \dots) \in G$, položme $f_n(x) = \pi_n(x_n)$. Toto zobrazenie je iste spojitý $1/n$-homomorfizmus (a teda aj δ-homomorfizmus), pretože je to vlastne kompozícia projekcie $p_n : G \to K_n$ na n-tú zložku a spojitého $1/n$-homomorfizmu π_n.

Vezmime teraz homomorfizmus $\varphi : G \to H$. Označme $i_n : G_n \to G$ kanonické vnorenie. Použitím tvrdenia vety 2.4.3 platí

$$\sup_{x \in G} \varrho(f_n(x), \varphi(x)) \geq \sup_{x \in i_n(G_n)} \varrho(\pi_n(p_n(x)), \varphi(x)) = \sup_{y \in G_n} \varrho(\pi_n(y), \varphi \circ i_n(y)) \geq \epsilon.$$

To ale značí, že f_n je ϵ-ďaleko od každého spojitého homorfizmu $\varphi : G \to H$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Teda f_n je hľadané f z tvrdenia propozície. $\square$

Ostáva otvorená otázka, či vo vete 2.4.1 možno zoslabiť predpoklad kompaktnosti grupy H alebo G na povedzme lokálnu kompaktnosť.

Literatúra

[1] S. Albeverio, J. E. Fenstad, R. Høegh-Krohn, T. Lindstrøm, *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics*, Academic Press, NY, 1986

[2] R. A. Anderson, *"Almost" implies "near"*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 229–237

[3] L. O. Arkeryd, N. J. Cutland, C. W. Henson (eds), *Nonstandard analysis: Theory and applications*, Kluwer Acad. Pub., 1997

[4] J. L. Bell, A. B. Slomson, *Models and ultraproducts: an introduction*, North–Holland, Amsterdam, 1971

[5] L. Bukovský, *Štruktúra reálnej osi*, Alfa, BA, 1979

[6] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model theory*, North–Holland, Amsterdam, 1973

[7] N. J. Cutland, *Nonstandard measure theory and its applications*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 529–589

[8] M. Davis, *Applied nonstandard analysis*, John Wiley & Sons, NY, 1977

[9] M. Foreman, F. Wehrung, *The Hahn–Banach theorem implies the existence of a non-Lebesgue measurable set*, Fund. Mathematicæ **138** (1991), 13–19

[10] D. J. H. Garling, *Another 'short' proof of the Riesz representation theorem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99** (1986), 261–262

[11] K. Grove, E. A. Roh, *Jacobi fields and Finsler metrics on compact Lie groups with an application to differentiable pinching problems*, Math. Ann. **211** (1974), 7–21

[12] D. Kazhdan, *On ϵ-representations*, Israel J. Math **43** (1982), 315–323

[13] P. A. Loeb, *An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite measure theory*, in *Probabilistic analysis and related topics*, vol II, Academic press, 1979, 105–142

[14] W. A. J. Luxemburg, *Two applications of the method of construction by ultrapowers to analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 416–419

[15] W. A. J. Luxemburg, *Nonstandard analysis: Lectures on A. Robinson's theory of infinitesimals and infinitely large numbers,* Math. Dept. California Inst. of Technology, Pasadena, CA, 1966

[16] W. A. J. Luxemburg, *Reduced powers of the real number system and equivalents of the Hahn–Banach extension theorem*, in *Int. symposium on the applications of model theory to algebra, analysis and probability*, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[17] J. Pawlikowski, *The Hahn–Banach theorem implies the Banach–Tarski paradox*, Fund. Mathematicæ **138** (1991), 20–21

[18] D. Pincus, *The strenth of the Hahn–Banach theorem*, in *Victoria symposium on nonstandard analysis*, Springer lecture notes **369**, 1974, 203–248

[19] A. Robinson, *Non–standard analysis*, Proc. Roy. Acad. Amsterdam Ser. A **64** (1961), 432–440

[20] A. Robinson, *Nonstandard analysis*, North–Holland, Amsterdam, 1966

[21] R. T. Rockafeller, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970

[22] D. Ross, *Yet another short proof of the Riesz representation theorem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **105** (1989), 139–140

[23] H. L. Royden, *Real analysis*, MacMillan, NY, 1968

[24] S. Wagon, *The Banach–Tarski paradox*, Cambridge University Press, 1986